

IAWPRC Report (Activated sludge process No.1)

Method of Model presentation

- Format and notation

Heterotrophic bacteria 의 호기성, 혐기성 성장.

Biomass 의 변화 - 세포성장과 decay 에 의한 감소, 그 이외에 산소 소비나 기질 제거 등을 고려하여 양론적으로 (mass balance) 모델을 세운다.

Kinetics 나 rate expression 은 생물학적 반응을 잘 설명할 수 있는 Monod eq.를 사용하고, 미생물의 사멸은 Herbert 가 제시한 모델 (미생물의 사멸속도는 미생물 농도에 대해 일차반응)을 이용한다.

- Use in mass balance

각각의 component 에 대하여 질량 수지식을 세우기 위해서는 시스템의 flow condition 과 속도식이 결합되는 형태가 타당하다.

- Continuity check

모델의 equation 들의 타당성을 조사하는데에는 양론계수들의 합이 0 이 됨을 이용한다.

Model incorporating carbon oxidation, nitrification, denitrification

대부분의 경우에 모델링은 단순화된 반응 속도 표현이 필요하다. 이러한 것은 실제적인 공정을 완벽하게 표현해낼 수는 없지만, 만족할만한 결과를 얻어낼 수 있다.

특이할 만한 것으로서, IAWPRC 그룹에서는 환경조건 변화에 영향을 받는 반응들을 설명하기 위해서 switch function 을 제시하였다.

- Conceptual model

Carbonaceous matter

분해성 유기물질은 readily biodegradable 과 slowly biodegradable 로 분류된다.

Readily biodegradable 은 분자량이 그리 크지 않은 간단한 형태의 물질이므로 곧바로 미생물의 성장과 생성에 이용된다. Slowly biodegradable 은 세포 외 작용으로 분해가 되는데 이를 hydrolysis 라고 한다. 이 반응은 반응속도가 느리기 때문에 종종 rate limiting step 으로 작용하며 anoxic 에서는 그 속도가 더욱 느려지고 anaerobic 에서는 거의 멈춘다. Hydrolysis 에 의해 readily biodegradable 로 분해되고 그 이후에 미생물의 성장에 substrate 로 작용한다.

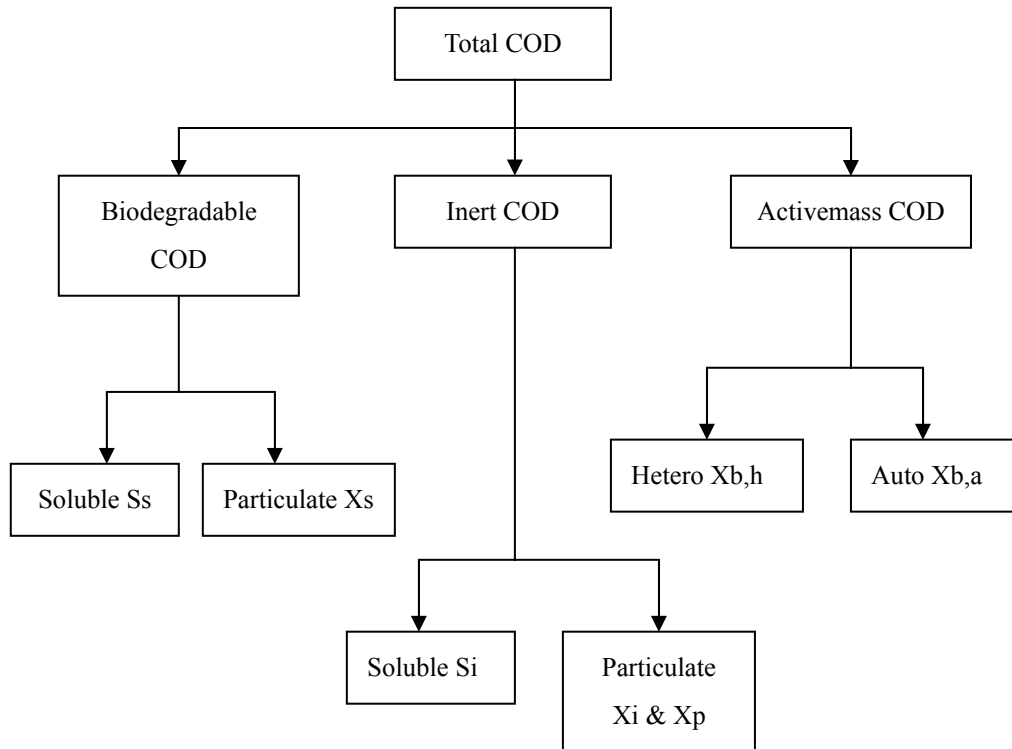
Heterotrophic biomass 는 aerobic, anoxic 상태에서 readily biodegradable 기질을 이용해

성장한다. 혐기성 상태에서는 성장하지 않는다.

Biomass 는 decay 에 의해 감소하는데 이것은 여러가지 메커니즘에 의해 발생한다.

Biomass 는 사멸하면서 particulate products X_p 를 생성한다.

미생물의 사멸은 전자수용체의 농도나 환경 조건에 무관하게 일어난다고 가정하고 있다. 그러나 사멸에 의해 생성된 X_p 의 전환은 hydrolysis 를 거쳐야 하므로 전자수용체나 환경에 영향을 받게 된다.



< Charaterization for carbonaceous components>

Nitrogeous matter

질소성분도 크게 biodegradable 과 non-biodegradable 로 나뉜다.

Biodegradable 은 암모니아 (SNH)와 용해성 유기 질소 (SND), 입자상 유기 질소 (XND)로 구분하는데 입자상 유기질소 (nonsoluble)는 hydrolysis 에 의해 용해성 유기 질소로 전환된다.

질소성분은 heterotrophic 에 의해 암모니아성 질소로 바뀌는데, 암모니아성 질소는 heterotrophic biomass 의 합성에 질소원으로 작용하며 autotrophic nitrifying bacteria 의 성장에 필요한 에너지를 공급하는 역할을 한다.

암모니아 질소는 autotroph 에 의해 nitrate 질소로 전환되며 이 과정에서 산소가 소비된다(Nitrification). 생성된 nitrate 질소는 anoxic 조건에서 heterotroph 의 최종 전자수용체로서의 역할을 수행하게 된다 (Denitrification).

Carbonaceous 에서의 반응 mechanism

Readily biodegradable -----> Heterotroph 의 성장에 사용 -----> 사멸하면 Inert organic matter 생성 (slowly biodegradable) -----> Hydrolysis -----> 다시 readily biodegradable

Nitrogenous 에서의 반응 mechanism

대부분이 ammonia nitrogen (soluble organic nitrogen 은 heterotroph 에 의해 ammonification)

-----> autotrophic nitrifying bacteria 에 의해 nitrification (Nitrate) -----> Anaerobic 상태에서 전자 수용체로 작용하여 nitrogen gas 로 전환 (Denitrification)

- Components in mathematical model

Soluble inert and particulate inert organic matter

반응에서 직접적인 영향을 미치지 않고 특별한 양론계수도 포함하지 않는다. 그럼에도 불구하고 모델에 포함되는 이유는 inert matter 가 공정의 performance 에 미치는 영향이 크기 때문이다. Soluble inert 는 방출수의 COD 에 영향을 미치게 되고 particulate 는 VSS 로 작용한다.

Readily biodegradable

Ss 는 heterotroph 의 호기성, 혐기성 성장에 의해서 제거되며 biofloc 에서 포집된 입자상 유기물질의 hydrolysis 에 의해 생성된다.

Slowly biodegradable

Hydrolysis 에 의해서 분해되고 biomass 의 사멸에 의해서 생성된다.

Biomass (Heterotrophs XBH, Autotrophs XBA)

Heterotroph 는 혐기성, 호기성 조건에서 성장함으로써 생성되고 autotrophs 는 호기성 조건에서만 성장한다. 두 가지 모두 사멸 (decay)에 의해서 제거된다.

Particulate products from biomass decay Xp

Biomass 의 사멸에 의해 발생하는 생성물이다. 분해되는 속도가 매우 느리기 때문에 활성슬러지 공정의 SRT 안에서 거의 inert 로 작용하게 된다.

참고로 VSS 의 농도를 결정하는 particulate term 은 Xs, XBH, XBA, Xp, XI 등이다.

Dissolved oxygen

모델에 사용되는 모든 반응은 DO 를 소비하는 반응이다. 따라서 DO 농도로

simulation 하기 위해서는 적당한 DO transfer 향이 첨가되어야 한다.

산소의 utilization 은 aerobic 성장에만 관여될 뿐 사멸과는 무관하다고 알려져 있다.

DO 수치식에서 4.57 은 autotrophs 가 암모니아 질소를 nitrate 질소로 전환하는데 필요한 이론적인 산소 소비량이다.

Nitrate nitrogen

Autotrophic bacteria 의 호기성 성장 단계에서 발생하며 heterotrophic bacteria 의 혐기성 성장과정에서 제거된다. SNO 의 수치식에서 나타나는 2.86 은 nitrate 를 nitrogen gas 로 전환하는 반응을 산소의 term 으로 바꾸기 위한 환산 계수이다.

Soluble ammonia nitrogen

SNH, 암모니아 질소는 biodegradable nitrogen 의 ammonification 에 의해서 생성되고 biomass 가 성장함에 따라 감소한다. Ammonia nitrogen 은 autotrophs 의 호기성 성장 단계의 에너지원으로 가장 많이 사용되고 세포의 합성에도 이용된다.

Soluble organic nitrogen

SND, particulate organic nitrogen XND 의 hydrolysis 에 의해 생성되고 ammonification 에 의해 암모니아성 질소로 전환된다.

Particulate organic nitrogen

XND, Biomass (hetero & auto)의 사멸에 의해 발생하고 hydrolysis 에 의해 제거된다.

Other nitrogen

XNB, XNP, XNI 등의 형태로 존재하는 질소 성분이 system 내에 존재할 수 있다.

- Processes in the model

기본적으로 활성 슬러지 공정은 네 가지의 공정으로 구성된다.

미생물의 성장, 미생물의 사멸, 유기 질소의 암모니아화 (ammonification), Hydrolysis 의 4 가지 공정으로 크게 구분할 수 있다.

Aerobic growth of heterotrophic biomass

용해성 기질과 산소를 소비하면서 (negative COD) 일어나는 과정으로서 두 가지의 factor 에 의해 제한되는 반응이다. 즉, 산소 농도와 기질의 농도 두 가지 요소에 따라서 반응속도가 결정되므로 앞에서 언급한 switch function 을 이용하게 된다.

Anoxic growth of heterotrophic biomass with nitrate nitrogen as the terminal electron acceptor

호기성 성장 반응과 마찬가지로 용해성 기질을 소비하는 heterotrophs 에 의해서 일어난다. 이 반응에서 nitrate 는 최종적인 전자 수용체로서의 역할을 수행한다 (Nitrate 는 환원되면서 다른 오염물질을 산화한다). Nitrate 의 제거량은 readily biodegradable substrate – formed cell 의 양에 비례한다.

Aerobic growth of autotrophic biomass

암모니아 질소가 autotrophs 의 에너지원으로서 작용을 하게 되고 최종 산물로서 nitrate nitrogen 이 생성된다 (Nitrification). 산소는 암모니아를 산화시킬때에 소비되므로 암모니아 질소의 양에 비례하여 소비량이 결정된다.

일반적으로 SRT 가 커질수록 heterotrophic biomass 의 yield 는 감소한다. 이는 긴 시간 동안 미생물군 내부에서 predation, lysis 등이 발생하고 maintenance energy 문제가 발생하기 때문이다.

Model No.1 에서는 두 가지의 가설을 바탕으로 미생물의 성장과 사멸을 모사하고 있다.

첫째로는 Bisubstrate hypothesis 로서, 기질 중에서 slowly biodegradable 은 미생물의 성장에 직접적인 영향을 미치지 못하고 우선 hydrolysis 를 통해서 readily biodegradable 로 전환된 후 미생물의 food 로 이용된다는 것이다. Hydrolysis 는 slowly biodegradable 이나 particulate 상태를 분해하는 반응으로서 가수 분해의 개념과, 세포를 하나의 mesh 로 생각하여 세포 내로 흡수되지 않는 XP, XS 등을 일단 세포벽에 흡착시킨 뒤 효소 등의 세포 외 작용으로 분해하고 미생물 내로 흡수하는 분해 반응을 포함한다.

둘째로는 Death-regeneration hypothesis 로서, 미생물이 사멸하면 두 가지 종류로 나뉜다는 내용을 담고 있다. 사멸한 미생물은 inert 성분 일부와 slowly biodegradable 을 생성하게 되고 이 중에서 slowly biodegradable 은 hydrolysis 를 거쳐서 다시 다른 미생물의 food 로 이용된다. 미생물이 과잉 성장하여 food 가 부족하게 되면 미생물 자체를 영양분으로 이용하게 되므로 XS 는 초기에 감소하는 추세를 보이다가 점차 증가하게 된다.

Carbonaceous

XS ----[Hydrolysis]-----> SS-----> XBH, XBA ----[Decay]-----> XP, XS
 (by XBH) (aerobic, anaerobic growth)

Nitrogenous

XND ----[Hydrolysis]-----> SND ----[Ammonification]-----> SNH

(by XBH)

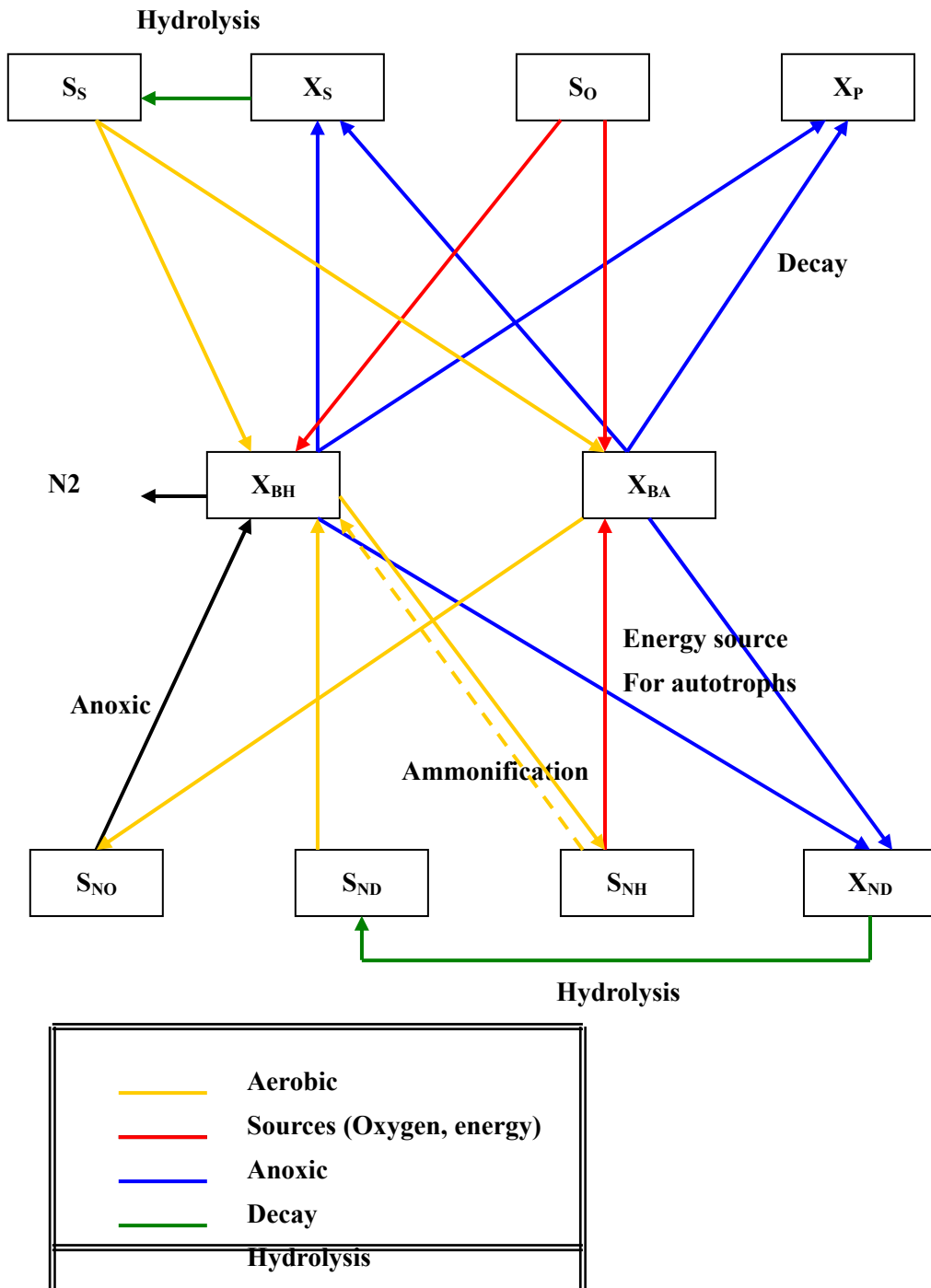
(by XBH under aerobic)

-----[Nitrification]-----> **SNO** -----[Denitrification]-----> **N2 gas**

(by XBA under aerobic)

(by XBH under anaerobic)

도표로 나타내면 다음과 같다.



※ *Aerobic, anoxic, anaerobic*

Aerobic : 호기성 상태를 나타내며 산소가 공급되는 조건을 말한다.

Anoxic : 혐기성 상태를 나타낸다. 반응기에 cap 이 씌워져 있는 상태를 가정해보면 반응기 내부에 원래부터 존재하고 있던 산소는 소비되거나 재폭기가 되지 않으므로 혐기성 상태를 유지하게 된다.

Anaerobic : 혐기성 상태를 나타내나 반응기에 cap 은 씌워져 있지 않다. 이러한 경우 공기로부터 반응기 내부로 재폭기가 일어날 수 있으므로 엄밀한 의미에서의 혐기성 상태는 유지되지 않는다. 그러나 별도의 폭기 장치가 없으므로 재폭기되는 산소량은 매우 적다고 보고 혐기성 상태로 간주한다.

Mass balance of IAWQ model in bioreactor

$$\frac{dX_{B,H}}{dt} = \left[\hat{\mu}_H \left(\frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left\{ \left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} \right) + \eta_g \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \right\} - b_H \right] X_{B,H} + \frac{Q_{in}}{V} X_{B,H,in} + \frac{Q_r}{V} X_{B,H,r} + \frac{Q_{internal}}{V} X_{B,H,internal} - \frac{Q}{V} X_{B,H}$$

$$\frac{dX_{B,A}}{dt} = \left[\hat{\mu}_A \left(\frac{S_{NH}}{K_{NH} + S_{NH}} \right) \left(\frac{S_O}{K_{O,A} + S_O} \right) - b_A \right] X_{B,A} + \frac{Q_{in}}{V} X_{B,A,in} + \frac{Q_r}{V} X_{B,A,r} + \frac{Q_{internal}}{V} X_{B,A,internal} - \frac{Q}{V} X_{B,A}$$

$$\frac{dS_S}{dt} = \left[-\frac{\hat{\mu}_H}{Y_H} \left(\frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left\{ \left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} \right) + \eta_g \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \right\} + k_h \frac{X_S/X_{B,H}}{K_X + (X_S/X_{B,H})} \left\{ \left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} \right) + \eta_h \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \right\} \right] X_{B,H} + \frac{Q_{in}}{V} S_{S,in} + \frac{Q_r}{V} S_{S,r} + \frac{Q_{internal}}{V} S_{S,internal} - \frac{Q}{V} S_S$$

$$\frac{dX_S}{dt} = (1 - f_p) (b_H X_{B,H} + b_A X_{B,A}) - k_h \frac{X_S/X_{B,H}}{K_X + (X_S/X_{B,H})} \left\{ \left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} \right) + \eta_h \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \right\} X_{B,H} + \frac{Q_{in}}{V} X_{S,in} + \frac{Q_r}{V} X_{S,r} + \frac{Q_{internal}}{V} X_{S,internal} - \frac{Q}{V} X_S$$

$$\frac{dX_P}{dt} = f_p (b_H X_{B,H} + b_A X_{B,A}) + \frac{Q_{in}}{V} X_{P,in} + \frac{Q_r}{V} X_{P,r} + \frac{Q_{internal}}{V} X_{P,internal} - \frac{Q}{V} X_P$$

$$\frac{dX_{ND}}{dt} = (i_{XB} - f_p i_{XP}) (b_H X_{B,H} + b_A X_{B,A}) - k_h \frac{X_S/X_{B,H}}{K_X + (X_S/X_{B,H})} \left\{ \left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} \right) + \eta_h \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \right\} X_{B,H} + \frac{Q_{in}}{V} X_{ND,in} + \frac{Q_r}{V} X_{ND,r} + \frac{Q_{internal}}{V} X_{ND,internal} - \frac{Q}{V} X_{ND}$$

$$\frac{dS_{ND}}{dt} = \left[-k_a S_{ND} + k_h \frac{X_S/X_{B,H}}{K_X + (X_S/X_{B,H})} \left\{ \left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} \right) + \eta_h \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \right\} \right] X_{B,H} \\ + \frac{Q_{in}}{V} S_{ND,in} + \frac{Q_r}{V} S_{ND,r} + \frac{Q_{internal}}{V} S_{ND,internal} - \frac{Q}{V} S_{ND}$$

$$\frac{dS_{NH}}{dt} = \left[-i_{XB} \hat{\mu}_H \left(\frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left\{ \left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} \right) + \eta_g \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \right\} + k_a S_{ND} \right] X_{B,H} - \\ \hat{\mu}_A \left(i_{XB} + \frac{1}{Y_A} \right) \left(\frac{S_{NH}}{K_{NH} + S_{NH}} \right) \left(\frac{S_O}{K_{O,A} + S_O} \right) X_{B,A} + \\ \frac{Q_{in}}{V} S_{NH,in} + \frac{Q_r}{V} S_{NH,r} + \frac{Q_{internal}}{V} S_{NH,internal} - \frac{Q}{V} S_{NH}$$

$$\frac{dS_{NO}}{dt} = -\hat{\mu}_H \eta_g \left(\frac{1 - Y_H}{2.86 Y_H} \right) \left(\frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) X_{B,H} + \\ \frac{\hat{\mu}_A}{Y_A} \left(\frac{S_{NH}}{K_{NH} + S_{NH}} \right) \left(\frac{S_O}{K_{O,A} + S_O} \right) X_{B,A} + \frac{Q_{in}}{V} S_{NO,in} + \frac{Q_r}{V} S_{NO,r} + \frac{Q_{internal}}{V} S_{NO,internal} - \frac{Q}{V} S_{NO}$$

$$\frac{dS_O}{dt} = -\hat{\mu}_H \left(\frac{1 - Y_H}{Y_H} \right) \left(\frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} \right) X_{B,H} - \\ \hat{\mu}_A \left(\frac{4.57 - Y_A}{Y_A} \right) \left(\frac{S_{NH}}{K_{NH} + S_{NH}} \right) \left(\frac{S_O}{K_{O,A} + S_O} \right) X_{B,A} + K_L a (S_{O,sat} - S_O)$$

Stoichiometric parameters

Y_A	g cell COD formed (g N oxidized) ⁻¹	0.24
Y_H	g cell COD formed (g COD oxidized) ⁻¹	0.67
f_p	dimensionless	0.08
i_{XB}	g N (g COD) ⁻¹ in biomass	0.08
i_{XP}	g N (g COD) ⁻¹ in endogenous mass	0.06

Kinetic parameters

$\hat{\mu}_H$	day ⁻¹	4.0
K_S	g COD m ⁻³	10.0
$K_{O,H}$	g O ₂ m ⁻³	0.2
K_{NO}	g NO ₃ -N m ⁻³	0.5
b_H	day ⁻¹	0.3
h_g	dimensionless	0.8
h_h	dimensionless	0.8
k_h	g slowly biodegradable COD (g cell COD . day) ⁻¹	3.0
K_X	g slowly biodegradable COD (g cell COD) ⁻¹	0.1
$\hat{\mu}_A$	day ⁻¹	0.5
K_{NH}	g NH ₃ -N m ⁻³	1.0
b_A	day ⁻¹	0.05
$K_{O,A}$	g O ₂ m ⁻³	0.4
k_a	m ³ . COD(g.day) ⁻¹	0.05

IAWQ Model No.1 List of Processes

1. Aerobic growth of heterotrophs

$$\rho_1 = \hat{\mu}_H \left(\frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} \right) X_{B,H} \quad (1)$$

2. Anoxic growth of heterotrophs

$$\rho_2 = \hat{\mu}_H \left(\frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \eta_g X_{B,H} \quad (2)$$

3. Aerobic growth of autotrophs

$$\rho_3 = \hat{\mu}_A \left(\frac{S_{NH}}{K_{NH} + S_{NH}} \right) \left(\frac{S_O}{K_O + S_O} \right) X_{B,A} \quad (3)$$

4. Decay of heterotrophs

$$\rho_4 = b_H X_{B,H} \quad (4)$$

5. Decay of autotrophs

$$\rho_5 = b_A X_{B,A} \quad (5)$$

6. Ammonification of soluble organic nitrogen

$$\rho_6 = k_d S_{ND} X_{B,H} \quad (6)$$

7. Hydrolysis of entrapped organics

$$\rho_7 = k_h \frac{X_S / X_{B,H}}{K_X + (X_S / X_{B,H})} \left\{ \left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} \right) + \eta_h \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \right\} X_{B,H} \quad (7)$$

8. Hydrolysis of entrapped organic nitrogen

$$\rho_8 = k_h \frac{X_S/X_{B,H}}{K_X + (X_S/X_{B,H})} \left\{ \left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} \right) + \eta_h \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \right\} X_{B,H} (X_{ND}/X_S)$$

(8)

Variables Processes Parameter values

SI (i=1) $r_1 = 0$

SS (i=2) $r_2 = -\frac{1}{Y_H} \rho_1 - \frac{1}{Y_H} \rho_2 + \rho_7$

XI (i=3) $r_3 = 0$

XS (i=4) $r_4 = (1 - f_P) \rho_4 + (1 - f_P) \rho_5 - \rho_7$

XB,H (i=5) $r_5 = \rho_1 + \rho_2 - \rho_4$

XB,A (i=6) $r_6 = \rho_3 - \rho_5$

XP (i=7) $r_7 = f_P \rho_4 + f_P \rho_5$

SO (i=8) $r_8 = -\frac{Y_H}{1 - Y_H} \rho_1 - \frac{4.57 - Y_A}{Y_A} \rho_3$

SNO (i=9) $r_9 = -\frac{1 - Y_H}{2.98 Y_H} \rho_2 + \frac{1}{Y_A} \rho_3$

SNH (i=10) $r_{10} = -i_{XB} \rho_1 - i_{XB} \rho_2 - \left(i_{XB} + \frac{1}{Y_A} \right) \rho_3 + \rho_6$

SND (i=11) $r_{11} = -\rho_6 + \rho_8$

XND (i=12) $r_{12} = (i_{XB} - f_P i_{XP}) \rho_4 + (i_{XB} - f_P i_{XP}) \rho_5 - \rho_8$

SALK (i=13) $r_{13} = -\frac{i_{XB}}{14} \rho_1 + \left(\frac{1 - Y_H}{14 * 2.86 Y_H} - \frac{i_{XB}}{14} \right) \rho_2 - \left(\frac{i_{XB}}{14} + \frac{1}{7 Y_A} \right) \rho_3 + \frac{1}{14} \rho_6$

Mass balances

1. Heterotroph biomass concentration

$$\frac{dX_{B,H}}{dt} = \left[\hat{\mu}_H \left(\frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left\{ \left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} \right) + \eta_g \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \right\} - b_H \right] X_{B,H}$$

2. Autotrophic biomass concentration

$$\frac{dX_{B,A}}{dt} = \left[\hat{\mu}_A \left(\frac{S_{NH}}{K_{NH} + S_{NH}} \right) \left(\frac{S_O}{K_O + S_O} \right) - b_A \right] X_{B,A}$$

3. Concentration of readily biodegradable substrate

$$\frac{dS_S}{dt} = \left[-\frac{\hat{\mu}_H}{Y} \left(\frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left\{ \left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} \right) + \eta_g \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \right\} + k_h \frac{X_S/X_{B,H}}{K_X + (X_S/X_{B,H})} \left\{ \left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} \right) + \eta_h \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \right\} \right] X_{B,H}$$

4. Concentration of slowly biodegradable substrate

$$\frac{dX_S}{dt} = (1 - f_P)(b_H X_{B,H} + b_A X_{B,A}) - k_h \frac{X_S/X_{B,H}}{K_X + (X_S/X_{B,H})} \left\{ \left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} \right) + \eta_h \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \right\} X_{B,H}$$

5. Concentration of inert particulate products arising from biomass decay

$$\frac{dX_P}{dt} = f_P (b_H X_{B,H} + b_A X_{B,A})$$

6. Concentration of particulate organic nitrogen

$$\frac{dX_{ND}}{dt} = (i_{XB} - f_P i_{XP})(b_H X_{B,H} + b_A X_{B,A}) - k_h \frac{X_S/X_{B,H}}{K_X + (X_S/X_{B,H})} \left\{ \left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} \right) + \eta_h \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \right\} X_{B,H}$$

7. Concentration of soluble organic nitrogen

$$\frac{dS_{ND}}{dt} = \left[-k_a S_{ND} + k_h \frac{X_S/X_{B,H}}{K_X + (X_S/X_{B,H})} \left\{ \left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} \right) + \eta_h \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \right\} \right] X_{B,H}$$

8. The ammonia concentration

$$\frac{dS_{NH}}{dt} = \left[-i_{XB} \hat{\mu}_H \left(\frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left\{ \left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} \right) + \eta_g \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) \right\} + k_a S_{ND} \right] X_{B,H} - \hat{\mu}_A \left(i_{XB} + \frac{1}{Y_A} \right) \left(\frac{S_{NH}}{K_{NH} + S_{NH}} \right) \left(\frac{S_O}{K_{O,A} + S_O} \right) X_{B,A}$$

9. Concentration of Nitrate

$$\frac{dS_{NO}}{dt} = -\hat{\mu}_H \eta_g \left(\frac{1-Y_H}{2.86Y_H} \right) \left(\frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \right) \left(\frac{S_{NO}}{K_{NO} + S_{NO}} \right) X_{B,H} + \frac{\hat{\mu}_A}{Y_A} \left(\frac{S_{NH}}{K_{NH} + S_{NH}} \right) \left(\frac{S_O}{K_{O,A} + S_O} \right) X_{B,A}$$

10. Oxygen concentration

$$\frac{dS_O}{dt} = -\hat{\mu}_H \left(\frac{1-Y_H}{Y_H} \right) \left(\frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} \right) X_{B,H} - \hat{\mu}_A \left(\frac{4.57 - Y_A}{Y_A} \right) \left(\frac{S_{NH}}{K_{NH} + S_{NH}} \right) \left(\frac{S_O}{K_{O,A} + S_O} \right) X_{B,A}$$

11. Decay ratio

$$b_H = \frac{b'_H}{1 - Y_H(1 - f_P)}$$

12. Fraction of inert material

$$f_P = \frac{(1 - Y_H)}{1 - Y_H f'_P} f'_P$$

Stoichiometry

Component →		i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
j	Process ↓		S _I	S _S	X _I	X _S	X _{B,H}	X _{B,A}	X _P	S _O	S _{NO}	
1	Aerobic growth of heterotrophs			$-\frac{1}{Y_H}$			1			$-\frac{1-Y_H}{Y_H}$		
2	Anoxic growth of heterotrophs			$-\frac{1}{Y_H}$			1				$-\frac{1-Y_H}{2.86Y_H}$	
3	Aerobic growth of autotrophs							1		$-\frac{4.57}{Y_A} + 1$	$\frac{1}{Y_A}$	
4	'Decay' of heterotrophs					$1-f_P$	-1		f_P			
5	'Decay' of autotrophs					$1-f_P$		-1	f_P			
6	Ammonification of soluble organic nitrogen											
7	'Hydrolysis' of entrapped organics			1		-1						
8	'Hydrolysis' of entrapped organics nitrogen											
Observed Conversion Rates [ML ⁻³ T ⁻¹]		$r_i = \sum_j v_{ij} \rho_j$										
Stoichiometric parameters: Heterotrophic yield : Y _H Autotrophic yield : Y _A Fraction of biomass yielding particulate products : f _P Mass N/Mass COD in biomass : i _{XB} Mass N/Mass COD in products from biomass : i _{XP}		Soluble inert organic matter [M(COD)L ⁻³]	Readily biodegradable substrate [M(COD)L ⁻³]	Particulate inert organic matter [M(COD)L ⁻³]	Slowly biodegradable substrate [M(COD)L ⁻³]	Active heterotrophic biomass [M(COD)L ⁻³]	Active autotrophic biomass [M(COD)L ⁻³]	Particulate products arising from biomass decay [M(COD)L ⁻³]	Oxygen (negative COD) [M(-COD)L ⁻³]	Nitrate and nitrite nitrogen [M(N)L ⁻³]		

10	11	12	13	Process Rate, ρ_j [$\text{ML}^{-3}\text{T}^{-1}$]
S_{NH}	S_{ND}	X_{ND}	S_{ALK}	
$-i_{\text{XB}}$			$-\frac{i_{\text{XB}}}{14}$	$\hat{\mu}_H \left(\frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} \right) X_{B,H}$
$-i_{\text{XB}}$			$\frac{1 - Y_H}{14 \cdot 2.86 Y_H}$ $-\frac{i_{\text{XB}}}{14}$	$\hat{\mu}_H \left(\frac{S_S}{K_S + S_S} \right) \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \right)$ $\left(\frac{S_{\text{NO}}}{K_{\text{NO}} + S_{\text{NO}}} \right) \eta_g X_{B,H}$
$-i_{\text{XB}} - \frac{1}{Y_A}$			$-\frac{i_{\text{XB}}}{14} - \frac{1}{7Y_A}$	$\hat{\mu}_A \left(\frac{S_{\text{NH}}}{K_{\text{NH}} + S_{\text{NH}}} \right) \left(\frac{S_O}{K_{O,A} + S_O} \right) X_{B,A}$
		$i_{\text{XB}} - f_P i_{\text{XP}}$		$b_H X_{B,H}$
		$i_{\text{XB}} - f_P i_{\text{XP}}$		$b_A X_{B,A}$
1	-1		$\frac{1}{14}$	$k_a S_{\text{ND}} X_{B,H}$
				$k_h \frac{X_S / X_{B,H}}{K_X + (X_S / X_{B,H})} \left\{ \left(\frac{S_O}{K_{O,H} + S_O} \right) \right.$ $\left. + \eta_h \left(\frac{K_{O,H}}{K_{O,H} + S_O} \right) \left(\frac{S_{\text{NO}}}{K_{\text{NO}} + S_{\text{NO}}} \right) \right\} X_{B,H}$
	1	-1		$\rho_7 (X_{\text{ND}} / X_S)$
$r_i = \sum_j v_{ij} \rho_j$				
$\text{NH}_4 + \text{NH}_3$ nitrogen [M(N)L ⁻³]	Soluble biodegradable organic nitrogen [M(N)L ⁻³]	Particulate biodegradable organic nitrogen [M(N)L ⁻³]	Alkalinity – Molar units	Kinetic Parameters: Heterotrophic growth and decay: $\hat{\mu}_H, K_S, K_{O,H}, K_{\text{NO}}, b_H$ Autotrophic growth and decay: $\hat{\mu}_A, K_{\text{NH}}, K_{O,A}, b_A$ Correction factor for anoxic growth of heterotrophs : η_g Ammonification : k_a Hydrolysis : k_h, K_X Correction factor for anoxic Hydrolysis : η_h