부록: 수치적분과 Taylor급수

1. 사다리꼴 법칙에 의한 수치 적분

수치적분에 대한 가장 간단한 형태의 하나가 사다리꼴 법칙이다. 이 방법은 다음의 단계들을 따른다.

(a) $y = f(x)$ 의 그림에 대하여 x 의 구간 a 에서 b까지의 적분간격이 n개의 같은 간격으로 나뉘어져 있다고 가정하자. 이때 간격의 크기는 $w = (b - a)/n$ 으로 주어진다.
(b) 각 간격의 면적은 사다리꼴 면적으로 근사된다.
(c) 총면적은 n 개의 사다리꼴 면적의 합으로 되고, 적분값을 근사한다.

$$
\begin{aligned}
Area &= \int_a^b f(x)dx \\
&\approx \left[\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) + \left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right) + \cdots \left(\frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right)\right]w \\
&= \left[\left(\frac{y_1 + y_{n+1}}{2}\right) + (y_2 + y_3 + \cdots + y_n)\right]w \\
&= \left[\left(\frac{y_1 + y_{n+1}}{2}\right) + \sum_{i=2}^{n} y_i\right]w
\end{aligned}
$$

여기서 $y_1 = f(a)$, $y_2 = f(a + w)$

$$
\begin{aligned}
y_3 &= f(a + 2w) \\
&\cdots \\
y_n &= f[a + (n-1)w] \\
y_{n+1} &= f(b)
\end{aligned}
$$

사다리꼴 법칙의 오차는 다음과 같다.

$$
-\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi), \qquad a < \xi < b
$$

2. Simpson 법에 의한 수치 적분

수치 적분에서 다소 좋은 방법이 Simpson 법인데 이 방법은 가장 널리 사용되는 것중의 하나이다. 이 방법은 x 의 적절한 구간에 대하여 주어진 $y = f(x)$ 의 곡선을 다음과 같은 3차 방정식으로 나타내지게 가정을 한다.

$$
y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3
$$

이때 간격 x_1 과 x_3 사이에서 두 인접한 조각들로 이루어진 면적은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \int_{x_1}^{x_3} y dx \\
&= \int_{x_1}^{x_3} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) dx \\
&= a_0 (x_3 - x_1) + \frac{a_1}{2}(x_3^2 - x_1^2) + \frac{a_2}{3}(x_3^3 - x_1^3) + \frac{a_3}{4}(x_3^4 - x_1^4)
\end{aligned}
$$

$x_2 = x_1 + w$ 와 $x_3 = x_1 + 2w$ 임을 주목하면 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$A_1 = w[2a_0 + a_1(2x_1 + 2w) + a_2(2x_1^2 + 4x_1 w + \frac{8w^2}{3}) + a_3(2x_1^3 + 6x_1^2 w + 8x_1 w + 4w^3)]$$

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 \\ y_2 &= a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 \\ &= a_0 + a_1(x_1 + w) + a_2(x_1 + w)^2 + a_3(x_1 + w)^3 \\ y_3 &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \\ &= a_0 + a_1(x_1 + 2w) + a_2(x_1 + 2w)^2 + a_3(x_1 + 2w)^3 \end{aligned}$$

이를 정리하면 다음과 같은 관계를 얻게 된다.

$$\frac{w}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3) = w[2a_0 + a_1(2x_1 + 2w) + a_2(2x_1^2 + 4x_1 w + \frac{8w^2}{3}) + a_3(2x_1^3 + 6x_1^2 w + 8x_1 w^2 + 4w^3)]$$

그러므로 $$A_1 = \frac{w}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3)$$

$x = a$ 에서 $x = b$ 까지의 적분이 n개의 같은 조각들로 나눠진다면 $n/2$개의 같은 면적들이 있다. 이 면적들을 더하게 되면 다음식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \int_a^b y\,dx &= \sum_{i=1}^{n/2} A_i \\ &= \frac{w}{3}[(y_1 + 4y_2 + y_3) + (y_3 + 4y_4 + y_5) + \cdots + (y_{n-1} + 4y_n + y_{n+1})] \\ &= \frac{w}{3}(y_1 + 4\sum_{i=2,4,6,\ldots}^{n} y_i + 2\sum_{i=3,5,7,\ldots}^{n-1} y_i + y_{n+1}) \end{aligned}$$

Simpson 법은 피적분함수가 1차, 2차 또는 3차 다항식일수록 적분값을 더욱 정확하게 제공한다. Simpson 법의 근사 오차는 다음과 같다.

$$-\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi), \quad a < \xi < b$$

4. Taylor 급수

$x = x_0$ 에서 함수 f(x) 을 Taylor 급수로 전개하고 처음의 n 개항으로 함수 f(x) 의 유효크기를 규정한다면 나머지항(remainder)은 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + f^{(n-1)}(x_0)\frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!}}_{n \text{ terms}} + \text{Remainder}$$

그렇다면, 함수 f(x) 의 실제크기는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\text{actual } f(x) = \text{first } n \text{ terms} + R_n$$

여기서 R_n 은 함수 f(x) Taylor 급수전개에서 처음 n 개의 항을 제외한 나머지항을 의미한다. R_n 의 크기는 다음의 방법을 통하여 그 크기가 추측되어질 수 있다.

$$\int_{x_0}^{x} f'(s)ds = \left[f(s)\right]_{x_0}^{x} = f(x) - f(x_0)$$

이는 함수 f(x) 가 하나의 항으로 전개되었을때 만을 고려하여 정리하면 다음과 같다.

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(s)ds = f(x_0) + R_1$$

$$\therefore R_1 = \int_{x_0}^{x} f'(s)ds$$

2개 이상의 항을 고려하기 위하여 일반적인 나머지항의 크기를 구해보자. R_1은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$R_1 = \int_{x_0}^{x} f'(s)ds = f'(x_0)(x - x_0) + R_2$$

여기서 적분식을 계산하기 위하여 다음과 같은 부분적분의 공식을 적용하자.

$$\int_{x_0}^{x} udv = [uv]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} vdu$$

$$u = f'(s) \longrightarrow du = f''(s)ds$$

$$dv = ds \longrightarrow v = s - x$$

그 결과 적분식은 다음과 같이 결정된다,.

$$\int_{x_0}^{x} f'(s)ds = \left[f'(s)(s - x)\right]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} (s - x) f''(s)ds$$

$$= f'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} (x - s) f''(s)ds$$

이를 이용하여 함수 f(x) 를 급수항으로 정리하면 다음과 같다.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} (x - s) f''(s)ds$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_2$$

$$\therefore R_2 = \int_{x_0}^{x} (x - s) f''(s)ds$$

같은 방법으로 R_n의 일반항을 유추하면 다음과 같다.

$$R_n = \int_{x_0}^{x} \frac{(x - s)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(s)ds$$