Chap 6 비정상상태 열전도

앞에서 다루어 왔던 정상상태 문제와는 달리, 1차원 문제도 다음과 같은

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

편미분 방정식으로 기술된다. 초기 조건 및 경계조건은 문제의 조건에 따라 달라진다.

6-1 반무한 고체

- 표면 온도의 갑작스런 변화

지배 방정식

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

경계조건

x=0, t>0에서 $T = T_0$

$x \to \infty$, t>0에서 $T \to T_i$

초기조건

$x \geq 0$, t=0에서 $T \to T_i$

$\theta = \dfrac{T - T_0}{T_i - T_0}$ 라 두면

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

B.C.'s

$\theta(0, t) = 0$ and $\theta(\infty, t) = 1$

I.C.

$\theta(x, 0) = 1$

이 문제를 풀기 위하여 다음과 같은 유사변수를 도입한다.

$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}$$

chain rule에 의하여

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial\theta}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\theta}{\partial\xi}\left(-\frac{\xi}{2t}\right)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial\theta}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\theta}{\partial\xi}\left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}\left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha t}}\right)^2$$

원식에 대입하여 정리하면

$$\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\left(-\frac{\xi}{2t}\right) = \alpha\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}\left(\frac{1}{4\alpha t}\right)$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} + 2\xi\frac{\partial\theta}{\partial\xi} = 0$$

이제는 θ가 ξ만의 함수이므로 더 이상 편미분으로 표시할 필요가 없다. 따라서

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + 2\xi\frac{d\theta}{d\xi} = 0$$

경계조건은

$\theta(0) = 0$: 원식의 첫번째 경계조건에서

$\theta(\infty) = 1$: 원식의 두번째 경계조건과 초기조건에서

$P = \frac{d\theta}{d\xi}$라 두면

$$\frac{dP}{d\xi} + 2\xi P = 0$$

$$P = C_1 \exp\left(-\xi^2\right)$$

$$\theta = C_1 \int \exp\left(-\xi^2\right) d\xi + C_2$$

경계조건을 대입하고 정리하면

$$\theta = \operatorname{erf}(\xi)$$

이 된다.

ξ와 같은 유사변수를 사용하여 문제를 해석할 수 있는 경우는 무한 경계면

을 포함하는 경우로 한정된다.

● 표면 열속의 갑작스런 작용

경계조건이 다음과 같이 주어질 때

x=0, t>0에서 $-k\frac{\partial T}{\partial x}=q_0$

$x\to\infty$, t>0에서 $T\to T_i$

초기조건

$x\geq 0$, t=0에서 $T\to T_i$

$\theta=\frac{T-T_i}{\sqrt{\alpha t}\,q_0/k}$ 라 두면

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\theta}{t}=\alpha\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$$

B.C.'s

$$\frac{d\theta(0,t)}{dx}=-\sqrt{\alpha t}\quad\text{and}\quad\theta(\infty,t)=0$$

I.C.

$$\theta(x,0)=0$$

위에서와 마찬가지로 유사변수를 도입하여 정리하면

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}+2\xi\frac{\partial\theta}{\partial\xi}-2\theta=0$$

$\frac{d\theta(0)}{d\xi}=-1$: 원식의 첫번째 경계조건에서

$\theta(\infty)=0$: 원식의 두번째 경계조건과 초기조건에서

이 되고, 따라서 편미분 방정식이 상미분 방정식으로 완전히 전환된다.

이 식을 풀면

$$\theta=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\xi^2\right)+2\xi[\mathrm{erf}(\xi)-1]$$

● 대류의 갑작스런 작용

경계조건이 다음과 같이 주어질 때

x=0, t>0에서 $-k\frac{\partial T}{\partial x} = h(T - T_\infty)$

$x \to \infty$, t>0에서 $T \to T_i$

초기조건

$x \ge 0$, t=0에서 $T \to T_i$

$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}$ 라 두면

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

B.C.'s

$$\frac{d\theta(0,t)}{dx} = -\frac{h}{k}\theta \quad \text{and} \quad \theta(\infty, t) = 0$$

I.C.

$$\theta(x,0) = 0$$

위에서와 마찬가지로 유사변수를 도입하여 정리하면

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + 2\xi \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0$$

$\frac{d\theta(0)}{d\xi} = -\frac{k}{h} 2\sqrt{\alpha t}$: 원식의 첫번째 경계조건에서

$\theta(\infty) = 0$: 원식의 두번째 경계조건과 초기조건에서

이 되고, $\frac{k}{h}\sqrt{\alpha t}$ 를 매개인자로 하면 위의 식을 상미분 방정식으로 변환된다. 결과는 그림 6.3에 주어져 있다.

6-2. 평판, 원통 및 구에서의 과도상태 온도 분포 및 열 전달

● 평판에 대한 과도상태 온도 분포

그림 6.4 (a)와 같은 경우에 지배방정식과 초기 및 경계조건들은 다음과 같이 주어진다.

지배 방정식

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

경계조건

x=0에서 $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$

x=L에서 $-k\frac{\partial T}{\partial x} = h(T - T_\infty)$

초기조건

t=0에서 $T = T_i$

위의 식들은 다음과 같은 무차원 변수들을 도입하여

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}, \quad X = \frac{x}{L}, \quad Bi = \frac{hL}{k} \quad \text{and} \quad \tau = \frac{\alpha t}{L^2}$$

(Bi=Biot수에 대해서는 집중계 해석을 다룰 때 설명하였다.)

정리하면

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2}$$

X=0에서 $\frac{\partial \theta}{\partial X} = 0$

X=1에서 $\frac{\partial \theta}{\partial X} = -Bi\theta$

$\tau = 0$ 에서 $\theta = 1$

위의 편미분 방정식은 공학수학 시간에 배운 변수 분리법을 사용하면 풀 수 있고, 결과들이 그림 6.4(b)와 6.4(c)에 주어져 있다. 그림에서 알 수 있듯이 시간에 따른 효과와 위치에 따른 효과가 분리될 수 있음을 보여준다.

그림 6.4(c)에서 보듯이 Bi가 작은 경우에는 평판의 중심에서의 온도나 평판 내부의 임의의 점에서의 온도가 거의 같다. 따라서 Biot수가 작은 경우에 대해서는 앞에서 다룬 집중계 해석이 타당성을 가지고 있다.

임의의 시간 t, 위치 x에서의 온도를 구하는 방법은 우선 그림 6.4(b)를 사용

하여 임의의 시간 t에서 계의 중심 온도를 구한다음, 그림 6.4(c)를 이용하여 위치에 따른 효과를 고려한다.

그림 6.5는 (시간 0에서) 임의의 시간 t까지 전달되는 에너지의 총량을 도시하였다.

- 원통 및 구의 경우에도 비슷한 해석을 할 수 있다. 다만 지배방정식의 형태가 약간 다를 뿐이다.