

제 3 장

선형 점탄성

3.1 서론

‘점탄성’ ~ 물질에 있어서 점성과 탄성이 동시에 존재하는 것(1.2절 참조).

모든 물질에 있어서 점성과 탄성이 동시에 존재

시료의 특정한 응답은 물질의 고유 시간과 실험 시간의 크기에 의존
실험이 상대적으로 느리다면 점성적인 거동
실험이 상대적으로 빠르다면 탄성적인 거동
중간 정도의 시간 크기에서는 혼합된 (점탄성적인) 응답이 관찰

모든 물질은 점탄성이라고 가정하는 것은 타당함.

==> 어떤 물질이 조건에 따라 Newtonian 혹은 Hookean 거동을 보여줌.

==> 다른 환경 하에서의 물질은 다른 유형의 거동을 보여줄 수 있음.

물질에 대한 선형 점탄성 응답을 결정하기 위해 노력을 기울인 이유:

첫째, 선형 점탄성 응답으로부터 물질의 분자 구조를 밝혀 낼 가능성이 있음.

둘째, 측정된 물질 인자와 함수는 제품의 품질 제어에 유용

셋째, //선형 점탄성을 연구하는데 도움

넷째, 면찰 정도와 동적 점도 사이의 유사성을 찾을 수 있음.

3.2 선형성의 의미와 결과

선형 점탄성에 대한 수학적 이론 ~ “중첩 원리”에 기초

즉, 임의 시간에서의 응답(예: 변형률)은 입력 신호(예: 응력)의 값에 정비례
예를 들어, 응력을 두 배로 하면 변형률도 두 배가 됨.

점탄성의 선형 이론에 있어서 미분 방정식은 선형

시간 미분을 한 계수는 상수

(예: 점도 계수, 강성 탄성률과 같은 물질 인자는 변형률과 변형 속도와 같은 변수들이
변하더라도 이러한 물질 인자들은 변하지 않음)

시간에 대한 미분은 보통 편미분

==> 변수에 있어서 약간의 변화에만 선형 이론을 적용할 수 있음을 의미

선형 점탄성에 대한 일반적인 미분 방정식:

$$\begin{aligned} (1 + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + \alpha_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}) \sigma \\ = (\beta_0 + \beta_1 \frac{\partial}{\partial t} + \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + \beta_m \frac{\partial^m}{\partial t^m}) \gamma \end{aligned} \quad (3.1)$$

여기서 $n=m$ 혹은 $n=m-1$

σ 와 γ 는 시간 t 의 함수일 수 있음.

스칼라 변수 σ 와 γ 를 텐서 일반화를 통해 대체할 수 있음.

(예: σ 는 응력 텐서 σ_{ij} 로 바꿔 쓸 수 있음)

3.3 Kelvin 모델과 Maxwell 모델

* 식 (3.1)의 특별한 경우를 고려해 보면,

만일 β_0 만이 0이 아닌 인자라면

$$\sigma = \beta_0 \gamma \quad (3.2)$$

==> 강성 탄성률이 β_0 인 Hooke 탄성(즉 선형 고체 거동) 방정식

만일 β_1 만이 0이 아닌 인자라면

$$\sigma = \beta_1 \frac{\partial \gamma}{\partial t} \quad (3.3)$$

즉,

$$\sigma = \beta_1 \dot{\gamma} \quad (3.4)$$

==> 점도 계수가 상수 β_1 인 뉴턴 점성 방정식

만일 $\beta_0 (= G)$ 와 $\beta_1 (= \eta)$ 이 동시에 0이 아닌 경우

$$\sigma = G\gamma + \eta \dot{\gamma} \quad (3.5)$$

==> 점탄성에 대한 가장 간단한 모델중의 하나 ('Voigt 모델' 혹은 'Kelvin 모델')
 만일 $t=0$ 에서 응력 $\bar{\sigma}$ 가 갑자기 가해진 후 일정하게 유지될 경우

$$\gamma = (\bar{\sigma}/G)[1 - \exp(-t/\tau_K)] \quad (3.6)$$

여기서 τ_K 는 η/G (응력 $\bar{\sigma}$ 에 대한 변형률 γ 의 성장 속도를 조절하는 역할)
 시간 상수 τ_K 를 '지연 시간'이라 부름.

무차원군 $\gamma G/\bar{\sigma}$ 의 시간에 따른 진행과정(그림 3.1)

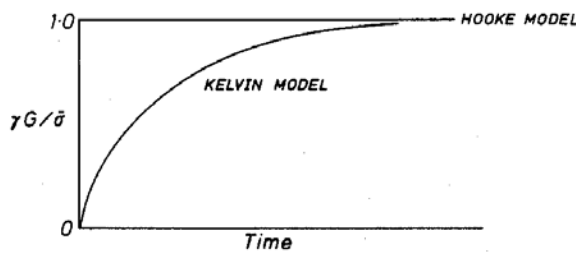


Fig. 3.1 Growth of strain γ following the application of stress $\bar{\sigma}$ at time $t=0$ for a Kelvin model and Hooke model.

평형 상태에서의 γ 값

$$\Rightarrow \bar{\sigma}/G = \gamma G/\bar{\sigma} = 1 \text{ (Hooke 모델에 대한 값)}$$

Hooke 모델은 “순간적으로” 최종 변형률 값에 도달; Kelvin 모델은 변형률이 지연됨.
 실제로는 완전히 탄성 고체인 경우에도 변형률이 시간 0 동안에는 자랄 수 없음.

<-- 응력파는 음속으로 진행하기 때문에 지연이 일어남.

“기계적 모델”: 스프링과 대쉬팔로 구성 (전체의 계는 실제 물질과 유사하게 거동)
 모델에 대한 힘, 신장, 시간에 관한 미분 방정식이 물질에 대한 응력, 변형률, 시간에
 관한 미분 방정식과 동등 (물질 거동의 특징을 모델을 관찰하여 추론 가능)

Hooke 변형은 스프링(즉, 힘이 신장에 비례하는 요소)

뉴턴 흐름은 대쉬팔(즉, 힘이 신장 속도에 비례하는 요소)으로 표시



Fig. 3.2 Diagrammatic representations of ideal rheological behaviour: (a) The Hookean spring; (b) The Newtonian dashpot.

스프링과 유사한 유변 방정식: 식 (3.2) (여기서 $\beta_0 = G$)

대쉬팔과 “ ” : 식 (3.4) (여기서 $\beta_1 = \eta$)

보다 복잡한 물질에 대한 거동 ~ 직렬이나 병렬로 연결시켜 묘사 가능

Kelvin 모델: 하나의 스프링과 하나의 대쉬팔의 병렬 결합 (그림 3.3(a))

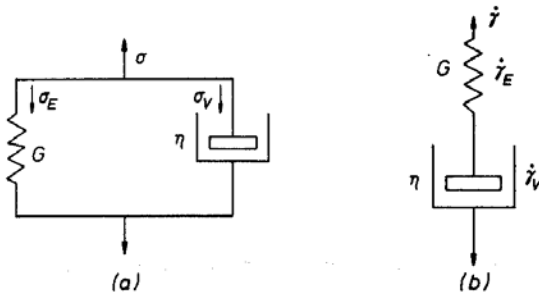


Fig. 3.3 The simplest linear viscoelastic models: (a) The Kelvin model; (b) The Maxwell model.

스프링의 신장(변형률)과 대쉬팔의 신장(변형률)은 동일

전체 응력 σ 는 각 요소의 응력의 합

$$\sigma = \sigma_E + \sigma_V \quad (3.7)$$

식 (3.2)와 (3.4) (여기서 $\beta_0 = G$ 이고 $\beta_1 = \eta$)를 사용하면

$$\sigma = G\gamma + \eta\dot{\gamma} \quad (3.8)$$

일반적인 선형 미분 방정식 (3.1)의 가장 간단한 경우인 식 (3.5)와 동일

==> 면찰 응력 $\bar{\sigma}$ 를 부과하면 스프링은 $\bar{\sigma}/G$ 로 주어진 변형률에 도달하겠지만 대쉬팔은 변형률의 성장을 지연시킴. (점도가 클수록 응답은 느려짐)

‘맥스웰(Maxwell) 모델’ ~ α_1 과 β_1 만이 0이 아닌 물질 인자로 됨.

$$\sigma + \tau_M \dot{\sigma} = \eta \dot{\gamma} \quad (3.9)$$

여기서 $\alpha_1 = \tau_M$, $\beta_1 = \eta$

특정한 변형률 속도 $\bar{\dot{\gamma}}$ 가 $t=0$ 에서 부과된 후 그 값을 유지한다면

$$\sigma = \eta \bar{\dot{\gamma}} [1 - \exp(-t/\tau_M)] \quad (3.10)$$

==> 면찰 부과의 시작점에서 응력 성장이 지연

일정한 $\bar{\dot{\gamma}}$ 를 가진 면찰 속도가 갑자기 없어지면 $t \geq 0$ 에서 다음처럼 표현

$$\sigma = \eta \bar{\dot{\gamma}} \exp(-t/\tau_M) \quad (3.11)$$

==> 응력은 평형 값에서부터 0으로 지수 함수적으로 완화 (그림 3.4)
속도 상수 τ_M 를 '완화 시간'이라 부름.

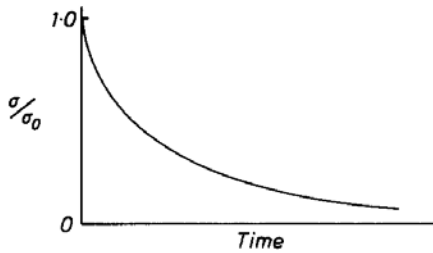


Fig. 3.4 Decay of stress σ following the cessation of steady shear at time $t = 0$ for a Maxwell model, where $\sigma_0 = \eta \bar{\dot{\gamma}}$.

맥스웰 모델: 대쉬팔과 스프링이 직렬로 결합 (그림 3.3(b))
변형률 (또는 변형률 속도)은 부가적(additive)

전체의 면찰 속도 $\dot{\gamma}$ 는 두 요소의 면찰 속도의 합:

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_E + \dot{\gamma}_V \quad (3.12)$$

동등하게 표현하면

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\sigma}}{G} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (3.13)$$

정리를 하면

$$\sigma + \tau_M \dot{\sigma} = \eta \dot{\gamma} \quad (3.14)$$

여기서 $\tau_M = \eta/G$ (식 (3.9)와 동일)

식 (3.1)의 물질 인자중 세 개를 0이 아닌 것으로 두는 경우
만일 $\alpha_1, \beta_1, \beta_2$ 가 0이 아닌 경우 ==> “Jeffreys 모델”

$$\sigma + \tau_M \dot{\sigma} = \eta(\dot{\gamma} + \tau_J \ddot{\gamma}) \quad (3.15)$$

두 개의 시간 상수 τ_M 와 τ_J 를 가짐.

세 개의 물질 인자를 적절히 선택하면 동일한 기계적 모델 구성 가능 (그림 3.5)

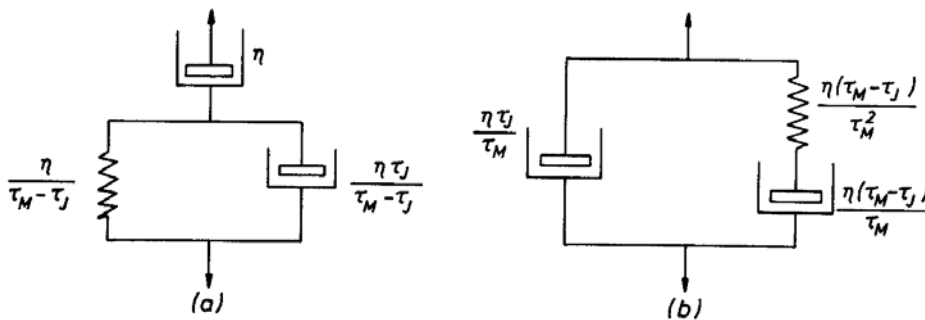


Fig. 3.5 Spring-dashpot equivalents of the Jeffreys model. The values of the constants of the elements are given in terms of the three material parameters of the model (eqn. 3.15).

식 (3.15)는 점성 유체에 고체 탄성구가 들어있는 묽은 현탁액, 비압축성 유체에 또다른 비압축성 유체가 들어있는 묽은 에멀전의 경우에 대해 수학적으로 유도한 것과 동등함.

“Burgers 모델”: 4개의 간단한 요소를 포함 (그림 3.6)

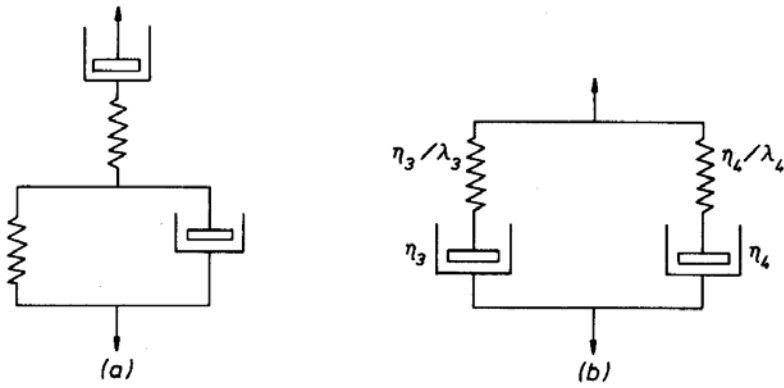


Fig. 3.6 The Burgers model: (a) and (b) are equivalent representations of this 4-parameter linear model.

맥스웰 형태로 표현한 경우(그림 3.6(b))의 Burgers 모델에 대한 구성 방정식:

$$\sigma + (\lambda_3 + \lambda_4)\dot{\sigma} + \lambda_3\lambda_4\ddot{\sigma} = (\eta_3 + \eta_4)\dot{\gamma} + (\lambda_4\eta_3 + \lambda_3\eta_4)\ddot{\gamma} \quad (3.16)$$

여기서 λ : 시간 상수

3.4 완화 스펙트럼

모든 모델들은 복잡함에 관계없이 두 가지의 정준형(canonical form)으로 표현 가능
일반화된 Kelvin 모델과 일반화된 맥스웰 모델로 표현 (그림 3.7).

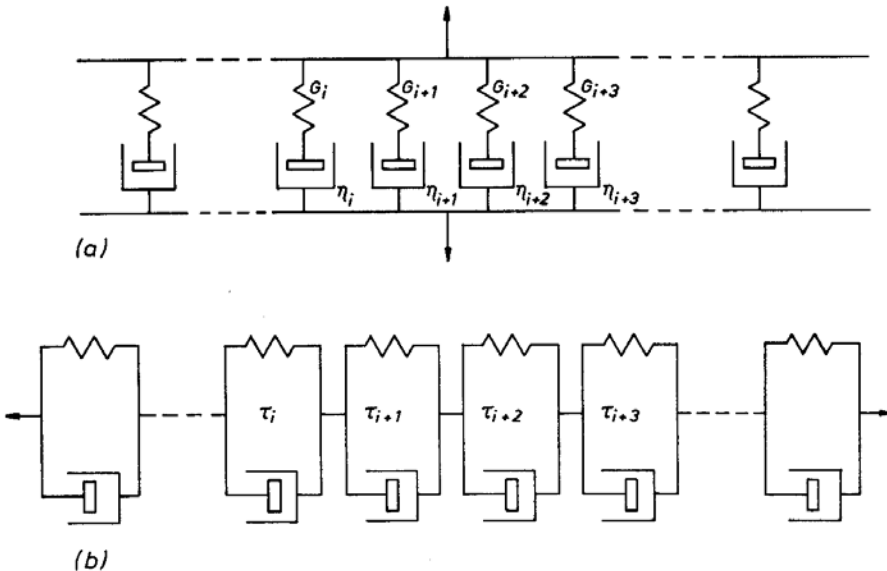


Fig. 3.7 Canonical spring-dashpot models: (a) Distribution of Maxwell relaxation processes; (b) Distribution of Kelvin retardation processes.

점탄성 거동을 표시하는 세 가지 방법(미분 방정식 (3.1)과

그림 3.7로 표시된 기계적 모델에 대한 두 가지 정준형)은 동등

* 무한히 많은 완화 시간으로부터 연속적인 분포를 갖는 완화 시간으로의 일반화

미분 방정식 식 (3.9)와 동등한 표현의 Maxwell 모델:

$$\sigma(t) = \frac{\eta}{\tau} \int_{-\infty}^t \exp[-(t-t')/\tau] \dot{\gamma}(t') dt' \quad (3.17)$$

여기서 τ_M 에 있는 첨자 M 을 없앴음.

병렬로 연결된 n 개의 이산(discrete) 맥스웰 요소로 이루어진 경우(그림 3.7(a)) 중첩 원리를 이용해 식 (3.17)을 일반화시키면,

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\eta_i}{\tau_i} \int_{-\infty}^t \exp[-(t-t')/\tau_i] \dot{\gamma}(t') dt' \quad (3.18)$$

여기서 η_i 와 τ_i 는 i 번째의 맥스웰 요소에 해당

“완화 시간들의 분포 함수”(혹은 “완화 스펙트럼”) $N(\tau)$:

$N(\tau)d\tau$ 가 τ 와 $\tau+d\tau$ 사이에 있는 완화 시간들을 갖는 모든 맥스웰 요소의 전체 정도에 대한 기여를 나타내는 것으로 정의

그러면 (식 (3.18)을 일반화시키면),

$$\sigma(t) = \int_0^{\infty} \frac{N(\tau)}{\tau} \int_{-\infty}^t \exp[-(t-t')/\tau] \dot{\gamma}(t') dt' d\tau \quad (3.19)$$

다음처럼 정의된 “완화 함수” ϕ 를 도입하면,

$$\phi(t-t') = \int_0^{\infty} \frac{N(\tau)}{\tau} \exp[-(t-t')/\tau] d\tau \quad (3.20)$$

식 (3.19)는 결국 다음 식으로 표현됨.

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \phi(t-t') \dot{\gamma}(t') dt' \quad (3.21)$$

Boltzmann 중첩 원리에 기초하여 (3.21)과 같은 식을 곧 바로 쓸 수 있음.

분포 함수 $H(\tau)$:

$H(\tau)d\tau$ 가 구간 τ 와 $\tau + d\tau$ 사이에 있는 완화 시간들로 공정들의 탄성 계수 (elasticity modulus)에 대한 기여를 나타내는 것으로 정의

분포 함수 $H(\tau)$ 을 도입하여 식 (3.18)로부터 전개해 나가는 것도 가능

완화 주파수 스펙트럼 $\bar{H}(\log F)$ 를 사용(여기서 $F = 1/(2\pi\tau)$)시 함수들 사이의 관계:

$$(N(\tau)/\tau) d\tau = H(\tau)d\tau = \bar{H}(\log F) d(\log F) \quad (3.22)$$

아주 느린 정상 흐름(즉 $\dot{\gamma}$ 는 작고 시간에 무관)에 있어서 식 (3.21)은 다음으로 됨.

$$\sigma = \eta_0 \dot{\gamma} \quad (3.23)$$

여기서 $\eta_0 = \int_{-\infty}^t \phi(t-t') dt' = \int_0^{\infty} \phi(\xi) d\xi$

유변학적 이력의 시간 크기를 나타내는 변수 ξ 는 시간 간격 $(t-t')$ 를 나타냄.

식 (3.19), (3.21)와 (3.22)로부터 다음을 유도할 수 있음.

$$\eta_0 = \int_0^{\infty} N(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} \tau H(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{H}(\log F)}{2\pi F} d(\log F) \quad (3.24)$$

η_0 는 정상 상태 실험에서 관찰했듯이 작은 면찰 속도에서의 극한 점도를 나타냄.

또한, η_0 는 $N(\tau)$ 스펙트럼하의 면적과 동일하며 $H(\tau)$ 스펙트럼의 1차 모멘트와 동일