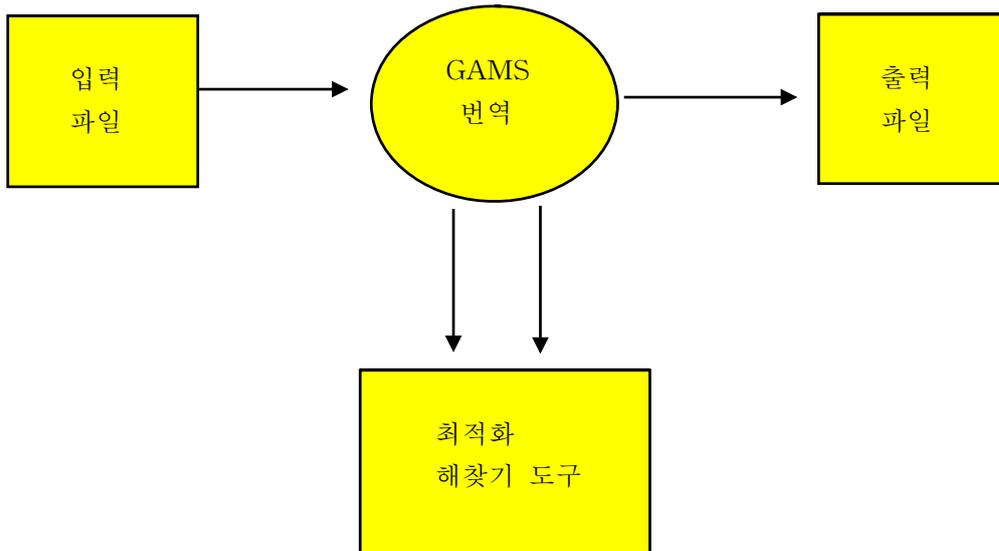


GAMS 입문

GAMS는 여러 가지 다른 알고리즘과 최적화 모형을 연결해주는 모형 개발 시스템이다. 모형은 사용자에게 의해 고급 언어를 사용하여 수식 형태로 입력 파일을 통해 GAMS로 공급된다. GAMS는 모형을 번역하여 해 찾기 도구 즉 최적화 알고리즘과 자동으로 연결한다. 해 찾기 도구에 의해 발견된 해 뿐만아니라 번역된 모형도 출력파일을 통해 사용자에게 보고된다. 아래 그림은 이과정을 설명하고 있다.



파일의 확장자를 명명하는 규약은 다음과 같다.

입력파일 : Filename. GAMS

출력파일 : Filename. LST

입력파일을 실행하고 번역하는 명령어는 :

GAMS filename

GAMS 입력파일은 일반적으로 다음과 같이 구성되어있다.

- 자료와 색인의 규정
- 제약식과 목적함수를 나타내는 수식과 변수의 목록과 유형
- 제약식과 목적함수를 나타내는 수식의 정의
- 한계값, 초기값 특수한 선택사항을 규정
- 해 찾기 도구 실행

입력파일의 문법은 정해져 있지만 형식은 확정적이지 않다. 그리고 여러형태의 모형을 취급하기 위한 유연성을 제공하기 위하여 많은 핵심 명령을 보유하고 있다. (그러나 모형은 수식형태로 주어져야하며 subroutine 이나 연산 절차는 취급될 수 없다.)

GAMS의 입력파일에 대한 문법을 간단히 설명하기 위하여 두 개의 예제를 준비했다.

예 1

본문의 문제 8.26에 주어진 다음과 같은 비선형 계획 문제를 고려해 보자.

$$\begin{aligned}
\min \quad & Z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 \\
\text{s.t.} \quad & 1 - x_2^{-1} x_3 \geq 0 \\
& x_1 - x_3 \geq 0 \\
& x_1 - x_2^2 + x_2 x_3 - 4 = 0 \\
& 0 \leq x_1 \leq 5 \\
& 0 \leq x_2 \leq 3 \\
& 0 \leq x_3 \leq 3
\end{aligned} \tag{1}$$

초기값

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 2 \tag{2}$$

먼저 부등식 $1 - x_2^{-1} x_3 \geq 0$ 은 다음과 같은 선형으로 재구성되어야 한다. 이것은 0으로 나누는 오류때문만 아니라 선형제약식이 취급하기가 쉽기 때문이다.

$$x_2 - x_3 \geq 0 \tag{3}$$

재구성된 문제에 대한 GAMS 입력파일 TEST.GMS 가 다음 페이지에 주어져있다.

첫째 열에 나타나는 \$ 표시는 흐름제어문을 뜻한다. 첫째행은 제목, 둘째, 셋째행은 출력에서 기호지도와 같은 자세한 내용을 거부하는 것이다. 일반적으로 이 세줄은 늘 포함한다. 변수 x_1, x_2, x_3 를 나열하기 위하여 VARIABLES 라는 핵심 명령어가 사용되었다. 목적함수값을 나타내는 변수 Z 도 반드시 여기에 포함되어야 한다. POSITIVE VARIABLES 는 변수 x_1, x_2, x_3 가 양수임을 나타낸다. 목적함수값 Z 는 일반적으로 양수나 음수 모두가 가능하므로 여기에 포함되지 말아야 한다. 문장의 끝을 표시하기 위하여 세미콜론 ; 이 사용됨을 유의하라.

다음 제약식과 목적함수의 이름을 나열하기 위하여 핵심 명령어 EQUATIONS가 사용되었다. 이름은 임의로 붙일 수 있다. 여기서는 제약식에 대해서 CON1, CON2, CON3, 그리고 목적함수에 대해서 OBJ를 붙였다.

실제 수식은 이름을 적고 2개의 마침표를 찍은 다음 정의된다. 등식과 부등식을 구별하기 위하여 다음 문법이 사용된다.

$$\begin{aligned}
& = E = \text{for} = \\
& = G = \text{for} \geq \\
& = L = \text{for} \leq
\end{aligned}$$

기본적인 연산기호는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
+ , - & : \text{덧셈, 뺄셈} \\
* , / & : \text{곱셈, 나눗셈}
\end{aligned}$$

** : 지수

목적함수는 다음과 같이 표현되었다

$$\text{OBJ.} \quad Z = E = X1^{**2} + X2^{**2} + X3^{**2} ;$$

세미콜론을 끝에 찍는 것을 명심하라. 변수의 제곱은 내장함수 SQR을 사용하여 표시할 수도 있다. GAMS의 사용자 교본 페이지 69에 있는 표1에는 GAMS가 제공하는 내장함수의 총 목록이 나와 있다.

다음은 입력파일에서 상한값과 초기값을 지정하는 단계이다. 이것은 변수에 다음과 같은 확장자를 부가적으로 표시하므로 가능하다.

- LO 하한값
- UP 상한값
- L 함수값 (초기 또는 계산 결과)
- M Lagrange 승수값 (상대 변수값)

x_1 , x_2 , x_3 의 하한값은 0 인데 이것은 핵심 명령어 POSITIVE VARIABLES에서 전에 정의했으므로 하한값을 따로 지정할 필요가 없다. 변수의 초기값을 지정하는 것은 반드시 필요한 것은 아니다. 만약 지정하지 않으면 GAM는 하한값을 초기값으로 지정한다. 비선형 계획문제에 있어서는 초기 예측값을 지정하는 것이 바람직하다. (예 X1.L=4;)

핵심 명령어 MODEL 에 의해 모형의 이름과 나열된 수식 중에서 실제로 어떤 수식을 사용할 것인지 지정된다. 이 경우 모형의 이름은 TEST 이고 모든 수식을 사용하도록 지정되었다.

다음에 나오는 OPTION 문장은 오류 수정을 위한 수식을 번역한 출력을 제거하는 기능을 가진다. 대부분의 경우 출력파일이 길어지는 것을 막기 위해 OPTION LIMROW=0 과 OPTION LIMCOL=0을 사용하면 된다. 자세한 내용은 사용자 교본 페이지 102-106에 있다.

마지막으로 SOLVE 문장을 통하여 최적화 알고리즘을 호출한다. SOLVE 문의 형식은 다음과 같다.

```
SOLVE (model name) USING (solver type)
MINIMIZING or MAXIMIZING (objective variable)
```

TEST.GMS

```
$TITLE Test Problem
$OFFSYMXREF
$OFFSYMLIST
```

* Example from Problem 8.26 in "Engineering Optimization" by

* Reklaitis, Ravindran and Ragsdell (1983)

*

VARIABLES X1, X2, X3, Z;

POSITIVE VARIABLES X1, X2, X3;

EQUATIONS CON1, CON2, CON3, OBJ;

CON1.. X2 - X3 =G= 0;

CON2.. X1-X3 =G= 0;

CON3.. X1 - X2**2 + X1*X2 - 4 =E= 0;

OBJ.. Z =E= SQR (X1) + SQR (X2) + SQR(X3);

* Upper bounds

X1.UP = 5;

X2.UP = 3;

X3.UP = 3;

* Initial point

X1.L = 4;

X2.L = 2;

X3.L = 2;

MODEL TEST / ALL / ;

OPTION LIMROW = 0;

OPTION LIMCOL = 0;

SOLVE TEST USING NLP MINIMIZING Z;

GAMS에서 가능한 해 찾기 도구의 유형은 다음과 같다 :

LP : 선형 계획법

NLP : 비선형 계획법

MIP : 선형 혼합 정수 계획법

RMIP : 정수 변수를 연속 변수로 확장한 선형 혼합 정수 계획법

MINLP : 정수 변수는 이진수이고 선형이며 연속변수는 비선형인 비선형 혼합 정수 계획법

RMINLP : 정수 변수를 연속 변수로 확장한 비선형 혼합 정수 계획법

GAMS 의 학생용 판에서 각 해 찾기 도구와 관련된 기정 선택사항의 최적화 소프트웨어는 다음과 같다.

LP : BDMLP
MIP, RMIP : ZOOM
NLP, RMINLP : MINOS 5.3
MINLP : DICOPT ++

BDMLP 은 단체법을 사용하여 선형 계획법을 푼다. ZOOM 은 단체법과 분지 한계법을 이용하여 혼합 정수 선형 계획법을 푼다. MINOS 5.3은 Lagrange 함수가 부착된 축소 접선법을 사용하여 비선형 계획법을 푼다. 이 방법은 만약 제약식과 목적 함수가 선형이면 단체법이 된다. 그리고 DICOPT++ 는 비선형 혼합 정수 계획법에 대하여 벌칙 함수가 부착된 외접근사법을 사용하여 푼다. 이들 해법에 대한 자세한 내용은 본문에 나와있다.

GAMS 는 기정 선택 사항으로서 위에서 열거한 해 찾기 도구를 사용하고 있지만 만약 다른 해 찾기 도구를 사용하고 싶으면, 예를들어, LP를 풀 때 BDMLP 대신 ZOOM을 사용하려면 다음과 같이 지정한다.

OPTION LP = ZOOM ;

예제를 풀기 위해 입력파일을 실행시키면 (GAMS TEST를 명령줄에 입력하고 엔터 키를 친다) 다음 두 페이지에 나타나는 출력파일 TEST.LST를 얻는다.

출력파일의 첫 부분 (4번째 줄에서 36번 줄)까지는 입력파일과 동일하다. 다음은 문제 크기에 대한 통계 자료가 표시된다. (즉, 변수 4개 : x_1, x_2, x_3, Z : 수식 4개 : 3 제약식과 목적함수). 비선형 모형에서 GAMS가 해석적인 미분식을 사용했을 경우 미분 관련 항목이 언급된다. 해 찾기 요약에는 목적함수의 결과값 $Z=7.2177$ 과 함께 비선형 모형에 대해서 국부 최적값이 발견되었음을 알린다. 자원 사용란에는 계산 시간이 1.648초 라고 적혀 있다. 출력파일에 대한 자세한 설명은 사용자 교본 페이지 117-121에 나타나있다.

그리고 수식과 변수에 대한 정보가 나열된다. LEVEL이라고 명명된 열에 주어진 값이 실제 계산된 결과이다. 예를들어 $x_1=2.526, x_2=0.916, x_3=0, Z=7.218$ 이다. LOWER, UPPER 라고 명명된 열은 하한값과 상한값을 나타내고 MARGINAL 열은 상대변수 또는 Lagrange 승수 값을 나타낸다. 예를들어 세 번째 제약식 (CON3)는 승수값이 2.637 인데 이것은 이 제약식이 활성화되었음을 의미한다.

TEST.LST

GAMS 2.25.082 386/486 DOS
Test Problem

05/07/99 10:11:12 PAGE

```

4
5 * Example from Problem 8.26 in "Engineering Optimization" by
6 * Reklaitis, Ravindran and Ragsdell (1983)
7 *
8 VARIABLES X1, X2, X3, Z;
9 POSITIVE VARIABLES X1, X2, X3;
10
11 EQUATIONS CON1, CON2, CON3, OBJ;
12
13 CON1.. X2 - X3 =G= 0;
14 CON2.. X1-X3 =G= 0;
15 CON3.. X1 - X2**2 + X1*X2 - 4 =E= 0;
16 OBJ.. Z =E= SQR (X1) + SQR (X2) + SQR(X3);
17
18 * Upper bounds
19 X1.UP = 5;
20 X2.UP = 3;
21 X3.UP = 3;
22
23 * Initial point
24
25 X1.L = 4;
26 X2.L = 2;
27 X3.L = 2;
28
29 MODEL TEST / ALL / ;
30
31 OPTION LIMROW = 0;
32 OPTION LIMCOL = 0;
33
34 SOLVE TEST USING NLP MINIMIZING Z;
35

```

COMPILATION TIME = 0.000 SECONDS VERID MW2-25-082

GAMS 2.25.082 386/486 DOS

05/07/99 10:11:12 PAGE

Test Problem

Model Statistics SOLVE TEST USING NLP FROM LINE 34

MODEL STATISTICS

BLOCKS OF EQUATIONS	4	SINGLE EQUATIONS	4
BLOCKS OF VARIABLES	4	SINGLE VARIABLES	4
NON ZERO ELEMENTS	10	NON LINEAR N-Z	5
DERIVATIVE POOL	6	CONSTANT POOL	8
CODE LENGTH	57		

GENERATION TIME = 0.000 SECONDS

EXECUTION TIME = 0.060 SECONDS VERID MW2-25-082

GAMS 2.25.082 386/486 DOS

05/07/99 10:11:12 PAGE

Test Problem

Solution Report SOLVE TEST USING NLP FROM LINE 34

S O L V E S U M M A R Y

MODEL	TEST	OBJECTIVE	Z
TYPE	NLP	DIRECTION	MINIMIZE
SOLVER	MINOS5	FROM LINE	34

**** SOLVER STATUS 1 NORMAL COMPLETION

**** MODEL STATUS 2 LOCALLY OPTIMAL

**** OBJECTIVE VALUE 7.2177

RESOURCE USAGE, LIMIT 0.110 1000.000

ITERATION COUNT, LIMIT 15 1000

EVALUATION ERRORS 0 0

M I N O S 5.3 (Nov 1990) Ver: 225-386-02

= = = =

B. A. Murtagh, University of New South Wales

and

P. E. Gill, W. Murray, M. A. Saunders and M. H. Wright

Systems Optimization Laboratory, Stanford University.

Work space allocated -- 0.04 Mb

EXIT -- OPTIMAL SOLUTION FOUND

MAJOR ITNS, LIMIT 7 200
FUNOBJ, FUNCON CALLS 34 34
SUPERBASICS 1
INTERPRETER USAGE 0.00
NORM RG / NORM PI 9.678E-10

	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
---- EQU CON1	.	0.916	+INF	.
---- EQU CON2	.	2.526	+INF	.
---- EQU CON3	4.000	4.000	4.000	2.637
---- EQU OBJ	.	.	.	1.000

	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
---- VAR X1	.	2.526	5.000	.
---- VAR X2	.	0.916	3.000	EPS
---- VAR X3	.	.	3.000	EPS
---- VAR Z	-INF	7.218	+INF	.

**** REPORT SUMMARY : 0 NONOPT
0 INFEASIBLE
0 UNBOUNDED
0 ERRORS

GAMS 2.25.082 386/486 DOS 05/07/99 10:11:12 PAGE

Test Problem

Solution Report SOLVE TEST USING NLP FROM LINE 34

EXECUTION TIME = 0.000 SECONDS VERID MW2-25-082

**** FILE SUMMARY

INPUT C:\DUMP\TEST.GMS
OUTPUT C:\DUMP\TEST.LST

예 2

Edgar 와 Himmelblau 의 책 “ Optimization of Chemical Process ” 의 409-410 페이지에 있는 열 교환기에 공정 흐름을 지정하는 문제를 고려해 보자.

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n \\ & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n \\ & x_{ij} = 0, 1 \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4)$$



이 문제는 배당문제로 잘 알려져 있다. 여기서 i 는 n 개의 공정 흐름에 대한 색인이고 j 는 n 개의 열 교환기에 대한 색인이다. 만약 공정 i 가 열 교환기 j 에 배당되면 이진 변수 $x_{ij} = 1$ 이고 그렇지 않으면 $x_{ij} = 0$ 이다.

두 제약식은 모든 열 교환기 j 는 한 개의 공정 흐름에 배당되어야하고 모든 공정 흐름 i 는 한 개의 열 교환기에 배당되어야 한다는 점을 나타낸다.

공정 흐름 i 를 열 교환기 j 에 배당할 때 발생하는 비용은 다음과 같다.;

GAMS 에서는 색인 집합을 사용하여 식 (4)의 모형을 구성한다. 다음 페이지의 입력파일 HEAT.GMS에 나타나는 것처럼 색인을 사용하는 것 이외에는 예 1의 경우와 유사한 입력파일 구조를 가진다. 입력자료들은 SETS 와 TABLE 향으로 주어져있다. 이들에 대한 설명은 사용자 교본 43-57 페이지에 나타나있다. 어떤 집합의 원소들은 알파벳이나 숫자로 표기된다. 숫자의 경우 범위를 나타내기 위하여 *가 사용된다. 즉 1*4는 1,2,3,4를 의미한다. 숫자를 TABLE에 입력할때는 일관성만 있으면 정확한 위치를 잡을 필요가 없다. 자

료는 SCALAR 나 PARAMETER 라는 핵심 명령어를 사용하여 입력해도 된다. 변수 x_{ij} 는 색인과 함께 $X(I, J)$ 로 지정되었으며 수식 $ASSI(J)$ 는 $j=1, 2, 3, 4$ 와 관련되어 있고 수식 $ASSJ(I)$ 는 $i=A, B, C, D$ 와 관련되어 있다. BINARY VARIABLES 라는 핵심 명령어를 사용하여 선언하였다. 합산 기호는 사용자 교본 17-18 페이지에 설명되어 있듯이 다음과 같다.

SUM (index of summation, terms in sum)

출력파일에서 계산된 결과를 모두 출력하는 것을 막기위해 OPTION SOLPRINT = OFF 를 사용하였다. 그리고 변수 x_{ij} 와 목적함수 Z 의 값만을 출력하기 위하여 DISPLAY 라는 색인이 사용될 수 없음을 유의하라. DISPLAY 에 대한 자세한 정보는 사용자 교본 143-148 페이지에 나와 있다. SOLVE 문에서는 x_{ij} 가 이진수이므로 해 찾기 도구 MIP 를 사용했다.

HEAT.GMS

1

- * Assignment problem for heat exchangers from pp . 409-410 in
- * "Optimization of Chemical Processes" by Edgar and Himmelblau

SETS

I streams / A, B, C, D /
 J exchangers / 1*4 / ;

TABLE C (I , J) Cost of assigning stream i to exchanger j

	1	2	3	4
A	94	1	54	68
B	74	10	88	82
	열 교환기 1	열 교환기 2	열 교환기 3	열 교환기 4
공정 흐름 A	94	1	54	62
공정 흐름 B	74	10	88	82
공정 흐름 C	73	88	8	76
공정 흐름 D	11	74	81	21
C	73	88	8	76
D	11	74	81	21 ;

VARIABLES X (I , J) , Z ;
 BINARY VARIABLES X(I , J) ;

EQUATIONS ASSI(J) , ASSJ(I) , OBJ ;

ASSI(J).. $\text{SUM}(I , X(I , J)) =E= 1 ;$

ASSJ(I).. $\text{SUM}(J , X(I , J)) =E= 1 ;$

OBJ.. $Z =E= \text{SUM}((I , J) , C(I,J)*X(I , J)) ;$

MODEL HEAT / ALL / ;

OPTION LIMROW = 0 ;

OPTION LIMCOL = 0 ;

OPTION SOLPRINT = OFF;

SOLVE HEAT USING MIP MINIMIZING Z ;

DISPLAY X.L, Z.L ;