

밀면으로부터 가열되는 안정하게 성층화된 유체층의 열적 불안정성

최 규현, 최 창균
서울대학교 공과대학 화학공학과

Thermal Instability of a Stably Stratified Fluid Layer
Heated from Below

K. H. Choi and C. K. Choi
Department of Chemical Engineering, Seoul National University

서론

수평면상에 위치한 선형온도 분포를 유지하는 유체층을 밀면에서 가열하거나 윗면을 냉각시킬 때 유체층의 역온도 기울기에 의하여 윗면에 있는 유체가 밀면에 있는 유체보다 크게 된다. 이와 같은 잠재적인 유체의 불안정상태는 점도나 열전도 등의 안정화 요인에 의해 어느 정도 유지되다가 부력에 의한 불안정화 요인이 안정화 요인을 극복할 수 있을 정도로 커지면 자연대류가 발생한다.

자연대류에 관한 연구는 열교환 및 저장, 태양열 집열기, 핵반응기, 기체의 흡수 등 일반적인 공정의 해석에서뿐만 아니라 대기의 유동, 난류의 근원을 밝히는데 중요한 역할을 한다. 더욱이 결정의 성장, 전자 장치의 냉각, 화학 증착, 전기 도금 등에 있어서도 자연 대류의 영향이 큰 것으로 알려져 있다. 따라서 자연대류의 유발요인을 밝히는 것은 학문적인 면에서 뿐만 아니라 실용적인 면에서도 중요하다. 본 연구에서는 초기에 안정하게 선형온도로 유지되는 밀면을 일정한 온도로 유지하면서 가열할 때 전파이론(propagation theory)을 도입하여 열적 불안정성을 조사하였다. 본 연구의 주된 관심은 주어진 Pr 과 초기 온도 차에 따라 정온 가열계에서 언제 부력에 의한 자연 대류가 발생되는가를 예측하는 것이다. 이론적인 결과와 기존의 실험 결과와 비교하고 전파이론의 타당성을 검증하였다.

이론

두 수평판 사이에 있는 뉴튼 유체를 생각하자. 시간 $t=0$ 인 순간에 온도가 갑자기 T_b 로 일정하게 $T_b \gg T_i$ 유지되면서 밀면이 가열되기 시작한다. 이러한 경우 언제 부력이 일어나는가 하는 문제는 오랫동안 논란의 대상이 되고 있다 [1]. 본 연구에서는 자연대류의 발생 시점을 결정하고 그에 따른 열전달 특성을 조사하기 위해서 비압축성 뉴튼 유체이며, 소산 에너지는 무시되며 중력장하의 밀도 변화를 제외하고는 모든 물성치들이 일정하다는 Boussinesq 가정을 도입하였고, 두 고정 경계면은 완전 열전도체이며 측면 현상을 무시하였고, 밀도가 온

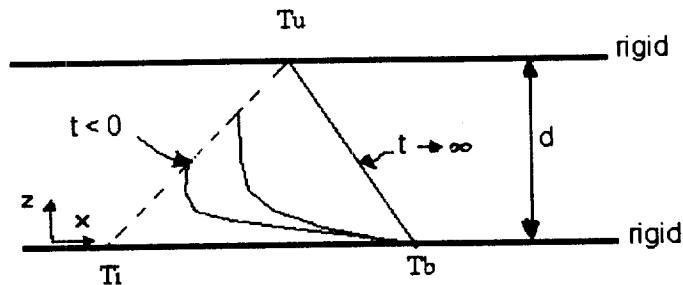


Fig. 1 Conduction state

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial z^2} \tag{13}$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial w_1}{\partial \tau} = -\nabla P + \nabla^2 w - \theta_1 \tag{14}$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} + Ra w_1 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} = \nabla^2 \theta_1 \tag{15}$$

Ra 는 ΔT 를 기준으로한 Rayleigh 를 나타낸다. 이때 전도에 의한 온도 분포는 τ 가 작을 경우 다음과 같이 주어진다[2].

$$\theta_0 = 1 + \gamma z - \text{erf}\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tag{16}$$

여기에서 $\gamma = (T_u - T_b)/\Delta T$, $\zeta = \frac{z}{\sqrt{\tau}}$ 이며 $\sqrt{\tau}$ 는 열침투 깊이의 크기를 대변한다. 이제 발생된 교란량이 다음과 같이 수평면상에서 주기적인 교란 형태를 보일 것으로 가정한다.

$$(w_1, \theta_1) = [w_1^*(\tau, z), \theta_1^*(\tau, z)] \exp[i(a_x x + a_y y)] \tag{17}$$

여기에서 i 는 허수이다. 위의 식 (14),(15) 에 수직 속도 성분 w_1 에 대하여 다음과 같은 진폭 함수를 구하게 된다.

$$\left[\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \tau} - \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2 \right] \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2 \right] w_1^* = -a^2 \theta_1^* \tag{18}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau} - \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2 \right] \right] \theta_1^* = -Ra w_1^* \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \tag{19}$$

τ 와 z 의 함수인 속도와 온도교란량을 유사변수의 함수로 전환하기 위해 $[w_1, \theta_1] = [\tau w^*(\zeta), \theta^*(\zeta)]$ 인 관계를 도입하면 아래와 같은 지배 방정식과 경계조건이 얻어진다.

$$D^4 w^* = 2a^* D^2 w^* - a^{*4} w^* + a^{*2} \theta^* - \frac{1}{Pr} \left[\frac{1}{2} \zeta D^3 w^* - \frac{1}{2} a^{*2} \zeta D w^* + a^{*2} w^* \right] \tag{20}$$

$$D^2 \theta^* = a^{*2} \theta^* - \frac{\zeta}{2} D \theta^* + Ra^* w^* D \theta_0 \tag{21}$$

B.C.'s $w^* = D w^* = \theta^* = 0$ at $\zeta = 0$ and ∞

여기에서 $Ra^* = Ra \tau^{\frac{3}{2}}$, $a^* = a\sqrt{\tau}$, $\gamma^* = \gamma\sqrt{\tau}$ 이다. 위와 같이 상사 변수

도에 대해 선형인 상태 방정식을 도입하였다. 이때 지배 방정식을 유도하면 다음과 같다.

$$\text{연속 방정식} \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (1)$$

$$\text{운동방정식} \quad \rho_i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \right) \mathbf{U} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{U} \quad (2)$$

$$\text{에너지 방정식} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \right) T = \alpha \nabla^2 T \quad (3)$$

$$\text{상태 방정식} \quad \rho = \rho_i [1 - \beta(T - T_i)] \quad (4)$$

여기서 ρ , μ , α , β 는 각각 밀도, 점도, 열확산 계수, 열팽창 계수를 나타낸다. 자연 대류 발생 시점에서의 온도, 속도, 압력 등의 교란량이 매우 미소할 것이다. 따라서 선형 안정성 이론에서 적용되는 교란되지 않은 성분에 극히 작은 교란량을 더하는 일반적인 방법을 적용하여, 위의 식에 대입하여 교란의 2차 이상의 누수를 무시하면, 전도식과 선형화된 교란식들은 다음과 같이 구성된다.

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T_0 \quad (5)$$

$$\rho_i \frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V}_1 + \rho \vec{g} \quad (6)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + W_1 \frac{\partial T_0}{\partial z} = \alpha \nabla^2 T \quad (7)$$

여기에서 하첨자 0 과 1 은 각각 기본량과 교란량을 나타낸다. 아래의 무차원 변수를 사용하여 위의 식을 무차원화 시킨다.

$$(x, y, z) = \frac{1}{d} (X, Y, Z) \quad (8)$$

$$(u_1, v_1, w_1) = \frac{d}{\alpha} (U_1, V_1, W_1) \quad (9)$$

$$\tau = \frac{\alpha t}{d^2} \quad (10)$$

$$\theta_0 = \frac{T_u - T_b}{\Delta T} \quad (11)$$

$$\theta_0 = \frac{g \beta T_1 d^3}{\alpha \nu} \quad (12)$$

ΔT 는 $T_b - T_i$ 를 나타낸다. 무차원 지배 방정식은 다음과 같다.

ζ 를 활용하여 식들을 변형시킨 후 주어진 γ^* 와 Pr에 대하여 최소 Ra^* 를 구하는 것이 전파이론의 핵심이 된다,

수치 해석 및 결과

자연대류 발생 임계 시점을 구하기 위해서는 앞에서 유도된 교란 방정식과 경계 조건들을 만족하는 임계 Ra_c^* 와 임계 a_c^* 를 찾아야 한다. 그러나 온도에 대한 교란 방정식 (21)에는 기본 온도의 기울기 값이 계수로 들어가 있으므로 우선 기본 온도 분포를 풀어야 한다. 기본 온도분포는 Runge-Kutta-Fehlberg 방법을 기본으로 하는 RKF45 부프로그램을 사용하여 풀었다. 여기에서는 적분 영역이 무한한 영역이 고려되어지므로 outward shooting 방법과 외삽법을 사용하여 위의 경계치 문제를 초기치 문제로 바꾸어 수치 해법을 수행하였다.

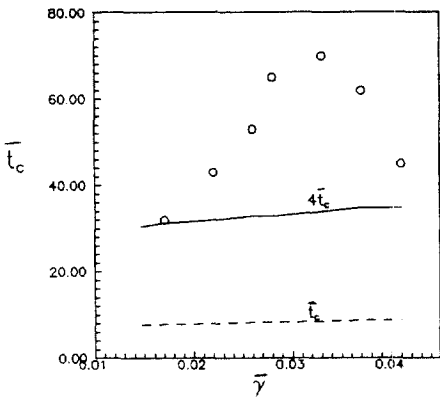


Fig. 2. t_c vs. γ

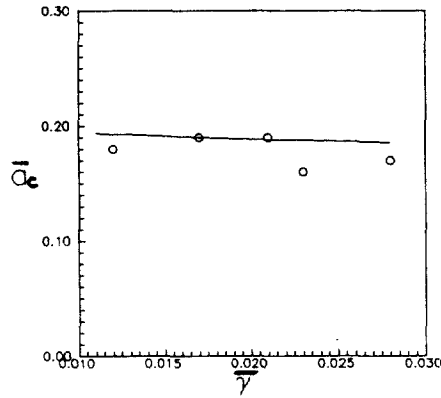


Fig. 3. a_c vs. γ

Pr 값이 클 경우, 전파 이론에 따른 결과와 실험값들을 비교하면 Figs. 2, 3 과 같다. 그림에 \circ 으로 표시된 Ueda 등[1]의 실험 결과는 Pr = 8800, Ra = 9000 - 17000, $1/\gamma = 0.60 - 1.37$ 일 때에 해당된다. Pr ≥ 100 인 경우 Pr 효과는 무시할 수 있다. $\bar{\tau}_c = \tau_c Ra^{2/3}$, $\bar{a}_c = a_c Ra^{-1/3}$, $\bar{\gamma} = \gamma Ra^{-1/3}$ 를 나타낸다. Fig. 2의 좌측에 보이는 바와 같이 Ra 값이 매우 클 경우에는 Foster[3]가 언급한 바와 같이 실험적으로 대류가 감지되는 시간이 $4\tau_c$ 에 해당되는 것으로 판단된다. $\bar{\gamma}$ 값이 커짐에 따라 이론치와 실험치와의 큰 차이는 실험조건에서 Ra 값이 적어 deep-pool 계로 가정한 전파이론의 제한성 때문일 것이다. 그러나 Fig. 3에 요약되어 있듯이 임계 파수와 실험치가 잘 일치하는 것은 매우 흥미롭다.

참고문헌

1. Ueda, H.S., Komori, T., and Miyazaki, H.O.: *Phys. Fluids*, **27**, 2617 (1984).
2. Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C.: *Conduction of Heat in Solids*, 2nd ed., Oxford University Press (1959).
3. Foster, T.D.: *Phys. Fluids*, **8**, 1249 (1965).