

안정하게 성층화된 유체층에서 열적 불안정성 해석

최규현, 최창균

서울대학교 공과대학 화학공학과

An Analysis of Thermal Instability of a Stably Stratified Fluid Layer

K.H. Choi and C.K. Choi

Department of Chemical Engineering, Seoul National University

서론

중력장하의 초기 정지 상태의 수평유체층의 밑면을 서서히 가열하면 부력에 의해 자연대류가 발생함은 이미 잘 알려진 사실이다. 이러한 자연대류에 관한 연구는 1900년대 초부터 많은 학자들에 의해 연구가 되어왔다.

자연대류에 관한 연구는 대기의 모델링 및 제품의 균질화, 순수화를 요구하는 결정 성장, 전자 소재의 가공 등에 대해 중요한 기여를 하고 있으며 따라서 자연대류의 유발 요인을 밝히는 것은 학문적인 면 뿐 아니라, 실용적인 면에서도 큰 흥미가 있다.

본 연구에서는 초기에 안정하게 성층화된 유체층의 밑면을 일정한 온도로 가열할때의 열적 불안정성을 동결시간 모델(frozen-time model)과 전파이론(propagation theory)을 사용하여 안정성 해석하였다. 본 연구의 주된 관심은 초기 온도의 영향과 여러 Rayleigh 수에 따라서 대류 발생 시간을 예측하고 실험결과와의 비교하는 것이다.

이론

본 연구에서는 Fig 1. 과 같이 유체층의 깊이가 L 인 두 개의 고정 경계면 사이에 초기 정지 상태에 있는 유체층을 기본계로 설정하였다. 이 유체층은 초기에 윗면의 온도가 T_u 로 유지되고 아랫면은 T_l 로 유지되고 있다. 시간 $t=0$ 인 순간에 온도 가 갑자기 T_b 로 일정하게 $T_b \gg T_l$ 유지되면서 밑면이 가열되기 시작한다. 본 연구를 수행하는데 사용한 유체는 비압축성 뉴튼 유체이며, 점성에 의한 에너지 소산은 무시하였고, 중력장하의 밀도 변화를 제외하고는 모든 물성치들이 일정하다는 Boussinesq 가정을 도입하였다. 본 연구에서의 ΔT 는 일반적인 $T_b - T_u$ 와는 달리 $T_b - T_l$ 를 나타내는 것이 특이한 점이다. 무차원화 과정을 통하여 중요한 매개인자로 Rayleigh 수가 나오게 된다. 이의 정의는 다음과 같다.

$$Ra = \frac{g\beta\Delta T d^3}{\alpha\nu} \quad (1)$$

일반적으로 $T_b - T_u$ 를 기준으로한 Rayleigh 수를 Ra_n 이라하자.

기존의 방법대로 진폭함수를 구하면 다음과 같다.[1]

$$\left[\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \tau} - \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2 \right] \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2 \right] w_1^* = -a^2 \theta_1^* \quad (2)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau} - \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2 \right] \right] \theta_1^* = -Ra w_1^* \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \tag{3}$$

여기서 하첨자 “0” 는 기본량을, 하첨자 “1” 은 교란량을 나타낸다. 기본 온도 분포의 변수 분리법에 의한 전도 방정식의 해는 다음과 같다.

$$\theta_0 = \gamma z + (1 - z) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi z}{n} \exp(-n^2 \pi^2 t) \tag{4}$$

“deep pool” 계라고 가정하면, 다음과 같은 해를 얻을수 있다.

$$\theta_0 = 1 + \gamma z - \operatorname{erf}\left(\frac{\zeta}{2}\right) \tag{5}$$

여기에서 $\gamma = (T_u - T_b) / \Delta T$, $\zeta = \frac{z}{\sqrt{\tau}}$ 이며 $\sqrt{\tau}$ 는 열침투 깊이의 크기를 대변한다.

동결시간 모델은 식 (23),(24) 에서 시간에 대한 교란량들의 변화를 무시하고, 기본 온도 분포의 시간 의존성만을 고려하는 고전적인 모델이다. 지배식은 아래와 같다.

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2 \right]^2 w_1^* = a^2 \theta_1^* \tag{6}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - a^2 \right] \theta_1^* = Ra w_1^* \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \tag{7}$$

$$\text{B.C.'s} \quad w_1^* = Dw_1^* = \theta_1^* = 0 \quad \text{at } z = 0 \text{ and } 1 \tag{8}$$

전파이론은 $[w_1^*, \theta_1^*] = [r w^*(\zeta), \theta^*(\zeta)]$ 인 관계를 도입하여 시간 의존형 열침투 깊이를 사용하며, 아래와 같은 지배 방정식이 얻어진다.

$$D^4 w^* = 2a^* D^2 w^* - a^{*4} w^* + a^{*2} \theta^* - \frac{1}{Pr} \left[\frac{1}{2} \zeta D^3 w^* - \frac{1}{2} a^{*2} \zeta D w^* + a^{*2} w^* \right] \tag{9}$$

$$D^2 \theta^* = a^{*2} \theta^* - \frac{\zeta}{2} D \theta^* + Ra^* w^* D \theta_0 \tag{10}$$

$$\text{B.C.'s} \quad w^* = Dw^* = \theta^* = 0 \quad \text{at } \zeta = 0 \text{ and } \infty \tag{11}$$

“deep pool” 계에서는 실험결과에 의하면 Ra^* 와 a^* 가 일정하다고 알려져 있으므로 “deep pool” 계에서는 전파이론의 적용이 가능하며 기본온도 분포식에서 새로운 변수인 γ^* 가 얻어진다.

수치 해석 및 결과

자연대류 발생 임계 시점을 구하기 위해서는 앞에서 유도된 교란 방정식과 경계 조건들을 만족하는 임계 Ra_c^* 와 임계 a_c^* 를 찾아야 한다. 우선 기본 온도 분포는 Runge-Kutta-Fehlberg 방법을 기본으로 하는 RKF45 부프로그램을 사용하여 풀었다. 여기에서는 적분 영역이 무한한 영역이 고려되어지므로 outward shooting 방법을 사용하여 위의 경계치 문제를 초기치 문제로 바꾸어 수치 해법을 수행하였다.

"deep pool" 계에서 γ 의 영향을 보기 위하여 $Pr=1$ 일때 여러 Ra 에 대하여 임계 시간과 γ 의 관계를 도시한것이 Fig. 2 이다. 이 그림에서 보듯이 γ 값이 클수록 계는 안정해짐을 알 수 있다. 여기에서는 Ra 를 고정하고 여러 γ 에 대하여 그렸으므로, Fig. 1 에서 볼 수 있듯이 밀면의 가열 온도차 ΔT 고정하고 초기 유체층의 윗면과 아랫면의 온도차 $T_u - T_i$ 를 변화시켰음을 의미한다. 그림에서 볼 수 있듯이 전파 이론은 임계시간이 0.01 보다 작은 "deep pool" 계에서만 적용 가능하므로 계에 영향을 미치는 γ 의 값은 0.001 이하로 매우 작은 경우에 국한된다. 즉 밀면의 가열온도차 ΔT 가 매우 클 경우에만 전파이론이 적용 가능함을 보여준다. γ 의 값이 커지기 시작하면 대류 발생 시간이 더 커지는 즉 계가 더 안정해짐을 알 수 있다. 그러나 그림에서도 보듯이 γ 의 값이 더 작아지기 시작하면 γ 의 값에 관계 없이 대류 발생 시간이 일정함을 알 수 있다. 일반적인 Ra_n 를 기준으로한 기존의 전파 이론의 결과와 Ra 를 기준으로한 결과와 일치하는데, 그 이유는 $Ra = Ra_n/(1-\gamma)$ 와 같은 관계를 갖게되는데 γ 는 매우 작은 값을 갖게되므로 $Ra = Ra_n/(1-\gamma) \approx Ra_n$ 라 할수 있기 때문이다.

Ueda 등[3]의 실험 결과를 대류 발생 시간과 Ra 그리고 임계 파수로 환산한 것이 Fig. 3 이다. Pr 이 무한한 경우에 Ra 에 대한 임계 파수와 의 관계를 나타낸 것이다. 그림에서 사각형은 Ueda 등[2]의 실험결과를 다시 Ra 와 임계 파수로 환산하여 그 범위를 나타낸 것이다. 그림과 같이 "deep pool" 계로 가정한 전파 이론의 수행 결과가 실험 범위의 왼쪽 상단에 수렴하는 경향을 보이고있다.

참고문헌

1. Foster, T.D.: *Phys. Fluids*, 8, pp. 1249(1965).
2. Ueda, H., Komori, S. and Miyazaki, T.: *Phys. Fluids*, 27, 2617(1984)

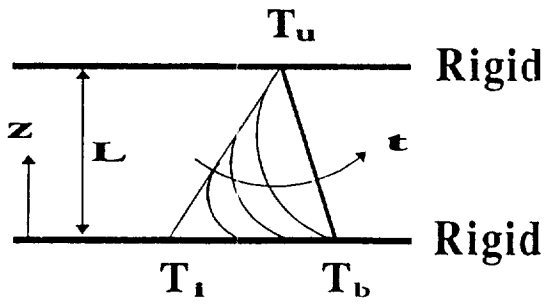


Fig. 1. Schematic diagram of isothermal system

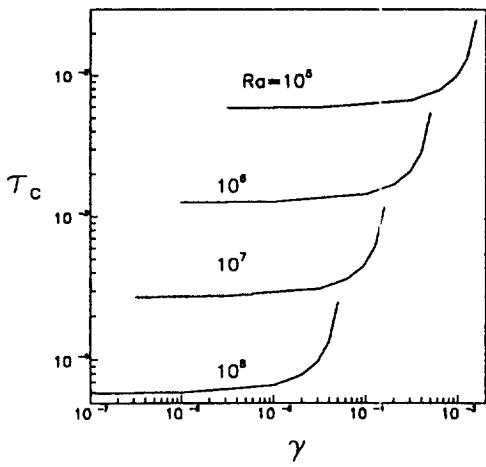


Fig. 3. Comparison of critical wave number with Ra

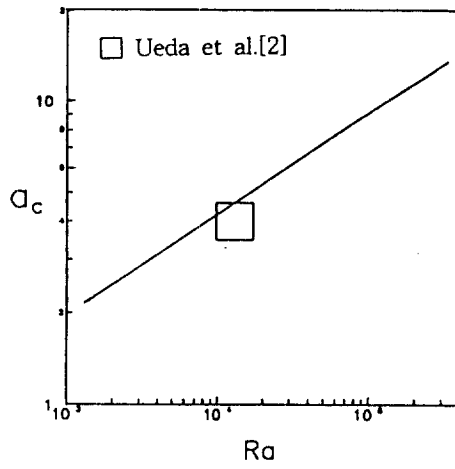


Fig. 2. Critical time with respect to γ for various Ra