

## Newton 유체의 방사공정에서의 운동학적 파동

김병민, 현재천  
고려대학교 화학공학과

## Kinematic Waves in the Melt Spinning of Newtonian Fluids

Byung Min Kim, Jae Chun Hyun  
Department of Chemical Engineering, Korea University

## 1. 서론

방사공정에서 일어나는 연신공명은 고분자 공정에서 관찰되는 중요한 불안정성 중의 하나로, 연신비가 임계연신비라는 어떤 한계의 값 이상으로 증가되면 방사사선의 단면적이 일정한 범위내에서 시간에 따라 주기적으로 변동되는 현상이다. 이 현상은 Christensen[1]과 Miller[2]에 의해 처음 발견되어 연신공명이란 이름이 붙여졌고, 이후로 많은 연구자들이 이 과제에 대해서 실험과 이론을 통한 연구를 수행하여 왔다[3-7]. 지금까지의 연구를 통하여 연신공명은 유체의 점탄성(viscoelasticities)으로 인하여 발생하는 것이 아니라 점성만을 가지는 Newton 유체에서도 발생하는 하나의 유체역학적 불안정성이라는 것이 밝혀졌다.

그러나 연신공명 현상이 발생하는 원인과 이 현상을 지배하는 역학은 무엇인지에 대한 의문은 아직도 남아 있다. 본 연구에서는 이러한 의문의 이해를 위하여 방사구에서 출발하여 특정 시간동안 방사사선에 머무르다 권취점에 도달하는 파동들에 초점을 맞추어 이들 파동들이 방사사선에 체류하는 시간들 사이의 관계를 구하고 이를 기초로 하여 연신공명에 대한 판단기준을 도출하였다.

## 2. 이론

방사사선에 작용하는 관성력, 중력, 공기항력 등의 이차적인 힘과 고분자의 결정화를 고려한 Newton 유체의 방사공정의 연속식, 운동식, 구성식, 에너지식, 결정화식은 각각 다음과 같다.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(AV)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\rho A \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right] = \frac{\partial(A\sigma)}{\partial x} + \rho g A - 2D\sqrt{\pi A} \quad (2)$$

$$\sigma = \eta_E \frac{\partial V}{\partial x} \quad (3)$$

$$\text{where } \eta_E(T, X) = \eta_0 \exp \left[ \frac{E}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right] \exp \left[ a \left( \frac{X}{X_\infty} \right)^b \right]$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{2\sqrt{\pi} h}{\rho C_p \sqrt{A}} (T - T_a) + \frac{V \Delta H}{C_p} \frac{\partial X}{\partial x} \quad (4)$$

$$\text{where } h = 0.473 \times 10^{-4} A^{-0.333} V^{0.334} \left\{ 1 + \left( 8 \frac{V_y}{V} \right)^2 \right\}^{0.167}$$

$$\frac{dX}{dx} = \frac{n K X_\infty}{V} \left( 1 - \frac{X}{X_\infty} \right) \left[ \ln \left( \frac{1}{1 - X/X_\infty} \right) \right]^{(n-1)/n} \quad (5)$$

$$\text{where } K(T, f_a) = K_{\max} \exp\left[-4 \ln 2 \left(\frac{T - T_{\max}}{D}\right)^2 + C f_a^2\right]$$

이들 지배방정식에 대한 경계조건과 초기조건은 다음과 같이 주어진다.

$$t < 0 : A = A_S, V = V_S, T = T_S, X = X_S \text{ for all } x \tag{6}$$

$$t \geq 0 : A = A_0, V = V_0, T = T_0, X = 0 \text{ at } x = 0 \tag{7}$$

$$V = V_0 r(1 + \epsilon) \text{ at } x = 1 \tag{8}$$

식 (1), (2), (3), (4) 및 (5)를 각각의 특성치로 무차원화하였으며, 수치모사로 풀 때, 충분한 정확도를 위하여 시간에 대하여 2,000개, 거리에 대하여 10,000개의 mesh로 나누었다.

본 연구에서 방사사선에는 여러 가지 파동이 존재하는 것으로 밝혀졌으며, 이들 중 중요한 두 개의 파동에 대한 지배방정식을 유도하면 다음과 같다.

먼저 크기가 일정하게 이동하는 AV(토출량) 파동의 지배방정식은 식 (1)로부터 다음과 같이 유도된다.

$$\left[ \frac{\partial(AV)}{\partial t} \right]_x + U \left[ \frac{\partial(AV)}{\partial x} \right]_t = 0 \tag{9}$$

여기에서 AV 파동의 이동속도, U는 다음과 같이 주어지며,  $[\partial V / \partial A]_x$ 이 0이 아닌 한 수치모사를 통하여 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} U &\equiv \left[ \frac{\partial x}{\partial t} \right]_{AV} = - \left[ \frac{\partial(AV)}{\partial t} \right]_x / \left[ \frac{\partial(AV)}{\partial x} \right]_t \\ &= \left[ \frac{\partial(AV)}{\partial t} \right]_x / \left[ \frac{\partial A}{\partial t} \right]_x = \left[ \frac{\partial(AV)}{\partial A} \right]_x = V + A \left[ \frac{\partial V}{\partial A} \right]_x \end{aligned} \tag{10}$$

그리고, 방사사선의 각 지점에서 단면적이 최대/최소가 되는 지점의 궤적, 즉  $[\partial A / \partial t]_x = 0$ 인 경로를 이동하는  $A_{\max} / A_{\min}$  파동은 AV 파동과는 달리 그 이동 속도를 표현할 수 없으나 다음과 같이 쓸 수 있으며,  $A_{\max}$  및  $A_{\min}$  파동의 이동 경로와 방사사선에서의 체류시간은 수치모사를 통해서만 구할 수 있다.

$$W \equiv \left[ \frac{\partial x}{\partial t} \right]_{A_{\max}} \text{ or } \left[ \frac{\partial x}{\partial t} \right]_{A_{\min}} \tag{11}$$

### 3. 결과 및 토론

Newton 유체의 등은 방사공정에서의 임계연신비( $r_c$ )는 20.218로 알려져 있다. 비등은 공정의 경우, 선형 안정성 분석으로 구한 Fig. 1[8]에서 보는 바와 같이 냉각효과가 큰 경우( $St > 0.2$ )에는 불안정한 영역이 존재하지 않아 냉각효과가 작은 경우( $St = 0.1, r_c = 30.701$ )를 연구의 대상으로 하였다. 두 공정에 대하여 연신비가  $r_c$ 보다 작은 경우, 같은 경우, 그리고 큰 경우에 대하여 수치모사를 수행하였다. 그 결과, 방사사선에 걸리는 장력이 최소/최대가 될 때 크기가 1인 AV 파동과  $A_{\max} / A_{\min}$  파동이 방사구를 떠나 각각  $(t_L)_1 / (t_L)_2$  및  $(\theta_L + \delta)_1 / (\theta_L + \delta)_2$  시간이 지난 후 권취점에 도달하였다. 그런데 이들 시간과 진동의 주기(T)와의 관계가, Fig. 2에 도시한 바와 같이 연신비가  $r_c$ 보다 작은 경우에는 등은 및 비등은 공정에서 다음의 조건이 만족되었다.

$$(t_L)_1 + (t_L)_2 + T/2 \geq (\theta_L + \delta)_1 + (\theta_L + \delta)_2 \text{ for } r \leq r_c \tag{12}$$

그러나 연신비가  $r_c$ 보다 클 때에는 식 (12)의 부등호는 반대가 되었다. 식 (12)의 좌변은 연신공명의 한 주기 동안 크기가 1인 AV 파동이 연이어 방사사선을

여행하는데 요구되는 시간(요구시간)이며, 우변은  $A_{max}$  및  $A_{min}$  파동이 연이어 방사사선을 여행하는데 소요되는 시간(소요시간)이 된다. 이들 두 파동의 발생과 이동 경로, 여행 시간 등을 연신비가 20.218( $r_0$ )인 등은 공정을 예로 하여 구한 결과를 Fig. 3에 도시하였다.

**4. 결론**

연신공명이라는 방사사선의 진동은 연속식의 hyperbolic한 특성으로 야기되며, 그 결과로 여러 가지 파동들이 방사사선 위를 운동하게 된다.

연신공명의 한 주기 동안 크기가 1인 AV 파동이 연이어 방사사선을 여행하는데 요구되는 시간과  $A_{max}$  및  $A_{min}$  파동이 연이어 방사사선을 여행하는데 소요되는 시간을 비교하여 연신공명에 대한 판단기준을 도출하였다.

**참고문헌**

1. Christensen, R. E., *S. P. E. J.*, **18**, 751 (1962).
2. Miller, J. C., *S. P. E. Trans.*, **3**, 134 (1963).
3. Kase, S. and T. Matsuo, *J. Polym. Sci. Part A*, **3**, 2541 (1965).
4. Pearson, J. R. A. and M. A. Matovich, *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, **8**, 605 (1969).
5. Ishihara, H. and S. Kase, *J. Appl. Polym. Sci.*, **19**, 557 (1975).
6. Fisher, R. J. and M. M. Denn, *AIChE J.*, **22**, 236 (1976).
7. Hyun, J. C., *AIChE J.*, **24**, 418 (1978).
8. 정현욱, 석사학위논문, 고려대학교 (1995).

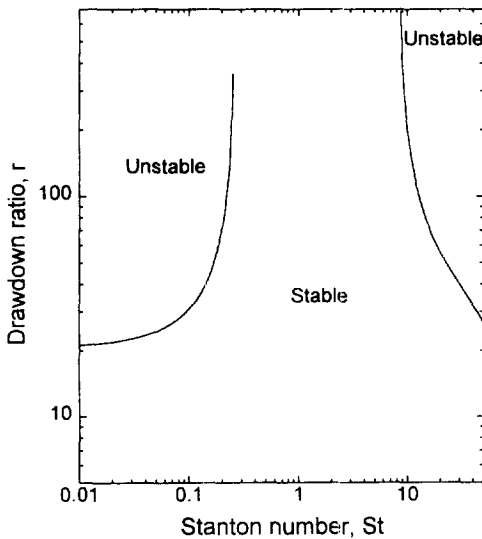


Fig. 1. Neutral stability curves for non-isothermal melt spinning of Newtonian fluids:  $E/RT_0=5.757$ ,  $T_d/T_0=0.529$ , and  $V_y/V_0=0.1$ .

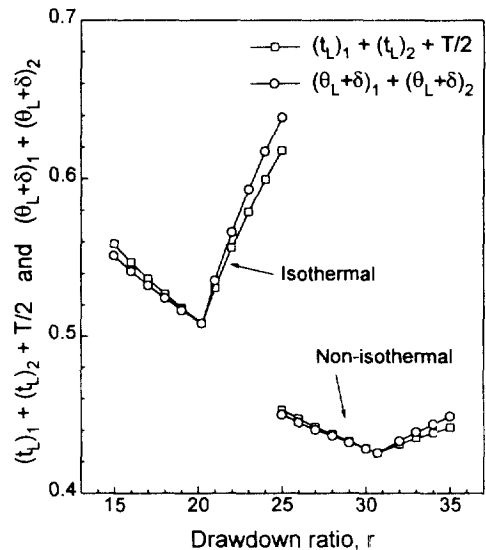


Fig. 2. The required traveling time for two successive unity-throughput waves and the allowed traveling time by  $A_{max}$  and  $A_{min}$  waves plotted against drawdown ratio,  $r$ .

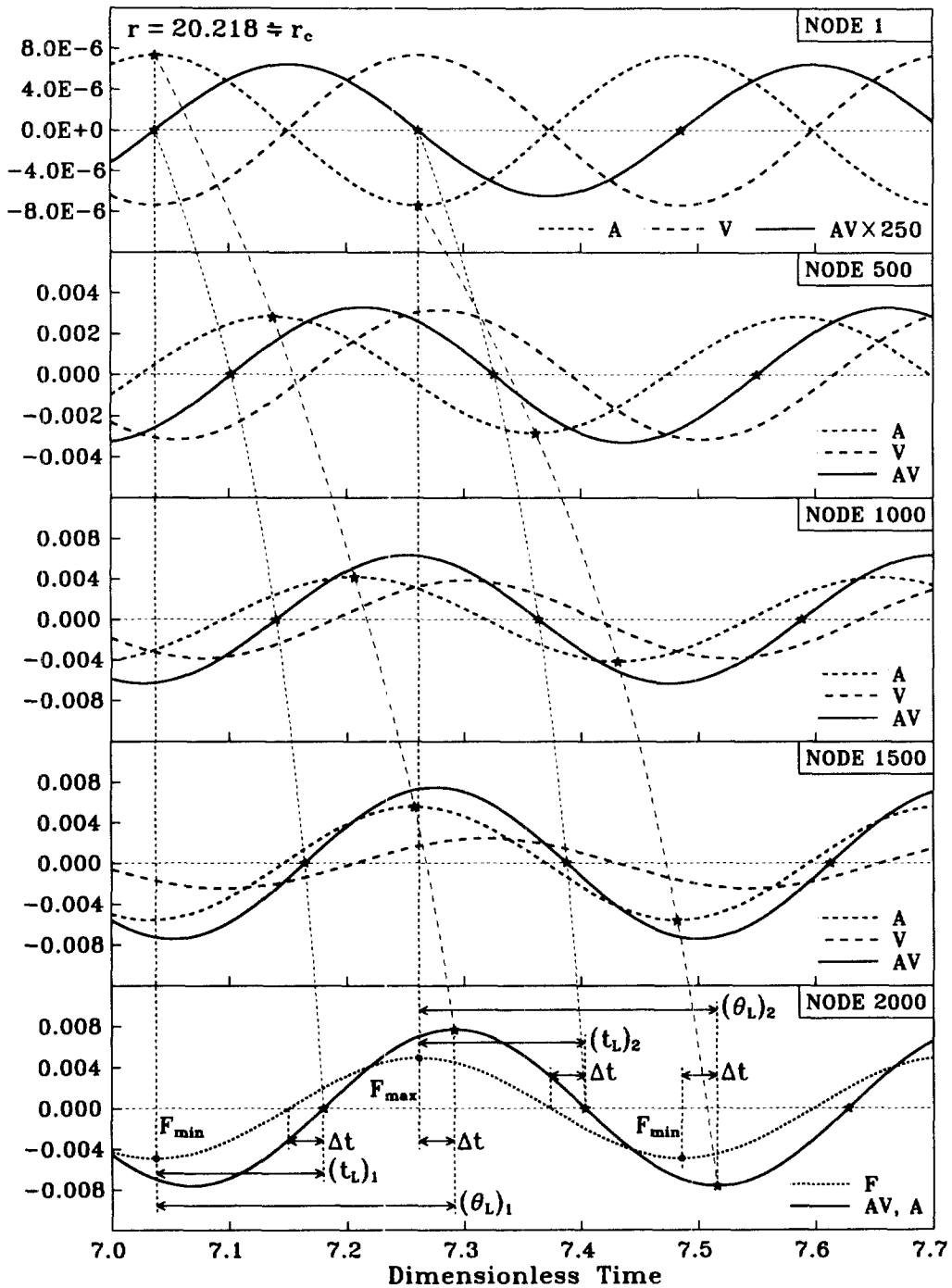


Fig. 3. The transient curves of the spinline variables of isothermal melt spinning at five different spatial positions of the spinline when  $r = 20.218 \cong r_c$ .