정온 가열계에서 시간에 따른 교란의 성장

정태준, 최창균
서울대학교 응용화학부

Temporal Evolution of Disturbances in an Isothermally Heated System

T.J. Chung and C.K. Choi
School of Chemical Engineering, Seoul National University

서 론

두 수평 평판사이에 위치한 유체의 밑면을 가열하면 잘 알려져 있는 부력에 기인한 자연대류가 발생한다. 이에 대한 연구는 지난 20세기 초 Bénard[1]의 조직적인 실험으로 시작되었으며 공학은 물론 물리학, 지질학, 해양학, 대기학 분야에서 수많은 연구들이 이루어져 왔다. 그 동안 본 연구진에 의해 개발된 전파이론[2-3]은 자연대류 발생 임계시점을 잘 예측하였다. 그러나 전파이론의 타당성을 이론적으로 증명하지는 못한 상태에 있었다. 본 연구에서는 밑면이 정온으로 가열되는 계에 대해 수치해법을 적용하여 어느정도 전파이론의 타당성을 밝혔으며, 자연대류 발생 임계시점과 관련하여 새로운 예측방법을 제시하였다.

이 론

본 연구에서는 Fig. 1과 같이 깊이가 d 인 사각 공동 내에 비압축성 뉴튼유체가 채워져 있고 윗면과 밑면이 T_i 와 $T_b(>T_i)$ 인 등온으로 유지되며 옆면은 단열 조건인 계를 고려하였다. 속도 경계조건은 고정 경계면에서의 안미끄러짐 조건을 사용하였다. 자연대류 연구에서 공히 적용되는 Boussinesq가정 하에 대류유동은 다음의 2차원 운동식과 에너지식을 따른다고 가정하였다.

$$\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial y}+Pr\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)v+\nabla\cdot\underline{F}_y \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \tau}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+Pr\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)w+Pr\,Ra\theta+\nabla\cdot\underline{F}_Z \tag{3}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau}+v\frac{\partial \theta}{\partial y}+w\frac{\partial \theta}{\partial z}=\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\theta-\nabla\cdot\vec{G} \tag{4}$$

여기서 $Pr(=\nu/\alpha)$과 $Ra\left(=g\beta\Delta Td^3/(\alpha\nu)\right)$는 각각 Prandtl 수와 Rayleigh 수를 의미한다. 길이는 유체의 깊이 d 로 무차원화 하였으며 시간과 속도, 온도, 압력은 각각 d^2/α, α/d, $\Delta T(=(T_b-T_i))$, $\alpha^2\rho_0/d^2$ 로 무차원화 하였다. g 와 α, β, ν, ρ_0는 중력가속도와 유체의 열확산계수, 부피팽창계수, 동점도, 밀도를 나타내며 ∇ 는 2차원 Laplacian이다. 또한 $\underline{F}$ 와 $\vec{G}$ 는 Langevin항으로서 추계적인 방법[4]에서 임의의 초기조건을 결정하는 역할을 하며 본 연구에서는 생략하였다.

자연대류의 불안정성에 대한 연구방법은 동결시간 모델[5]과 증폭이론[6], 전파이론[2-3], 추계모델[4], 에너지법[7] 등이 있다. 앞의 세가지 방법은 물리량을 기본량과 미소 교란량의 합으로 가정한 선형이론에 바탕을 두고 있다. 동결시간 모델은 시간항의 생략으로 Pr 의 영향을 살펴볼 수 없으며 Foster[6]에 의해 제안된 증폭이론은 그가 제안한 증폭인자가 임의적이라는 단점을 지니고 있다. 추계모델의 경우 임의적인 초기조건을 사용하였고 에너지법은 안정성의 하한치만을 제시하였다. 본 연구진에 의해 개발된 전파이론은 결정론적인 방법으로 대류발생 시점에서 미소 교란들이 주로 열경계층 깊이 내에서 전파된다는 개념 하에 엄밀한 크기위수 해석을 통해 자연대류 발생 임계시점 τ_c 를 예측하였다.

Prandtl 수가 큰 경우, Patrick과 Wragg[8], Inoue 등[9]은 실험을 통하여 Nusselt 수 Nu가 시간 t에 따른 변화를 보이고 Nu 대 t의 그림에서 최소 Nu값을 보이는 시간 t_u를 명백한 대류 검지시간으로 생각하였다. 이 특징적인 시간 t_u와 전파이론에서 구한 t_c 사이에는 “$t_u \approx 4t_c$”의 관계를 보인다. 이러한 t_c와 t_u의 차는 이미 Mahler 등[10]과 Foster[11]에 의해 직관적으로 설명되었지만 수학적으로 증명되지 못하였다. 정 등[12]은 전파이론에서 얻은 교란분포를 Herring[13]이 제안된 평균장 근사법을 이용하여 시간에 따른 거동을 살펴보았으나 급격한 가열이 수반될 경우 열경계층의 거동을 설명하기에 Galerkin 방법에 한계가 있었다.

본 연구에서는 Patankar[14]에 의해 개발된 유한부피법을 이용하여 급격한 가열하에서의 교란의 성장과 대류발생 임계시점과의 관계를 설명하였다. 수치해석을 위한 계산 영역과 경계조건을 Fig. 1에 보인 것과 같이 격자배열은 속도와 온도 및 압력을 엇갈리게 하였으며, 압력장을 계산하기 위해 SIMPLE 방법을 사용하였다. 특히 시간과 공간에 대한 차분화는 수치해법의 안정성과 수렴성을 고려하여 오차가 1 %범위 내로 들어오게 하기 위해 시간간격 $\Delta\tau = 10^{-7}$과 수직방향의 거리간격 $\Delta z = 1/200$을 사용하였다.

결과 및 토론

본 연구는 전파이론에서 얻은 대류발생 임계시점 $\tau = \tau_c$에서의 속도교란과 온도교란을 초기조건으로 하였다. Fig. 2와 같이 10개의 세포대류 분포를 갖는 초기 온도교란의 크기 θ_*는 $10^{-3} \sim 10^{-5}$을 사용하였으며 이에 따른 초기 속도교란의 크기 v_*와 w_*는 전파이론에서 얻은 크기위수를 만족하는 값을 사용하였다. 이와 같은 초기 교란의 선택은 $\tau = 0$에서 초기조건의 임의성을 배제해 줄 수 있으며 추계모델에서 제시한 미소교란의 의존성을 검증할 수 있다.

$Pr \to \infty$와 $Ra = 10^6$인 경우 계에 입력된 교란의 제곱평균제곱근(rms)값을 시간에 따라 전개해 보면 Fig. 3과 같다. 입력된 초기교란은 일정한 크기로 어느 시점까지 유지되다가 급격하게 성장한 후 지배방정식의 비선형 항의 영향에 의해 요동친 뒤 수렴한다. 교란의 성장은 초기 속도의 크기에는 거의 무관하며, 이는 Foster[6]에 의해 제안된 증폭이론의 증폭인자가 임의적임을 나타낸다. 증폭인자는 $\overline{w} = w'_{rms}(\tau)/w'_{rms}(0)$으로 정의되기 때문에 초기조건이 다르게 입력되면 다양한 $\overline{w}$가 존재하게 되어 일반적인 값을 정의하기 어렵다. 여기서 w'_{rms}는 교란의 진폭에 대한 rms값을 나타낸다. 한편 초기교란이 전파이론에서의 크기위수를 만족하며 일정하게 유지되는 것은 Mahler 등[10]이 언급한 내용과 일치하는 것이며, 전파이론의 국지적인 성장률이 $1/\tau_c$에 비례하고 일반적으로 알려진 교란의 성장이 $\exp(\sigma\tau)$임을 고려하면 Fig. 3에서와 같이 교란의 크기가 $\tau = \tau_c$까지 일정한 값으로 유지되는 것은 타당하다. 여기서 σ는 교란의 성장률이다.

일반적인 수치해법은 선형이론을 사용한 안정성 해법과는 달리 교란의 크기 및 분포가 직접적으로 계산에 참여하지 않는다. 따라서 본 수치해법에서는 평균장 근사법의 개념을 도입하여 온도를 $\theta = \langle\theta\rangle + \theta'$로 간주한다. 여기서 $\langle\theta\rangle$과 θ'은 수평평균 온도와 이에 대한 국지적인 차를 나타내며 무한 평판의 경우 선형이론의 개념과 동일하다. 이를 이용해 평균온도와 온도 교란량의 성장률을 직접 비교해 보면 어느 시점에서 교란의 성장이 전도상태 평균온도의 성장률을 벗어나게 되는지 계산 할 수 있다. 평균온도와 온도 교란량의 성장률을 각각 다음과 같이 정의하였다.

$$r_0 = \frac{1}{\langle\theta\rangle_{rms}}\frac{d\langle\theta\rangle_{rms}}{d\tau}, \qquad r_1 = \frac{1}{\theta'_{rms}}\frac{d\theta'_{rms}}{d\tau} \qquad \text{(5a-b)}$$

식 (5a)로 주어진 평균온도의 성장률은 시간이 매우 작은 경우, 본 연구 대상계에서는 $1/(4\tau)$에 따라 감소하며 τ가 매우 커지면 $r_0 \to 0$이 된다. 이러한 경향은 열경계층 두께의 성장과 관련이 있다. 반면 온도 교란량의 성장률은 급격하게 증가하여 $d\theta'_{rms}/d\tau$가 가장 큰 시점에서 최고점에 이른 후 급격하게 감소한다. 교란량의 이와 같은 경향은 준정상상태 근사를 이용한 Mahler 등[10]의 결과와 유사하다. 그러나 (5)와 같이 정의된 성장률은 본 연구에서 처음 제기된 물리량으로써 Mahler 등[10]의 결과와는 달리 기본량과 교란량

으로 분리하여 계산할 수 있다. 대류유동이 발생하기 이전에는 전도에 의한 메커니즘이 우세하여 $r_0 > r_1$ 이 되며 계가 열적으로 불안정하게 되거나 규칙적인 유동이 발생할 경우 $r_1 \geq r_0$ 이 된다.

Figure 4에 나타나 있듯이 임의의 초기조건 $\theta_* = 10^{-3}$, 10^{-4}, 10^{-5} 을 입력한 결과 초기조건과는 무관하게 $\tau \leq \tau_{r_{1,max}}$ 의 구간에서 동일한 성장률을 가지며 $\tau = 6.5\times10^{-4}$ 에서 식 (5a)와 (5b)로 대변되는 성장률들이 서로 교차하였다. 이 값은 전파이론에서 얻은 임계시점 $\tau_c = 7.5\times10^{-4}$ 보다 약간 작은 값이며 Fig. 3에서 온도 교란량이 일정한 값에서 벗어나는 시점이기도 하다. 초기 입력조건과 무관하게 일정한 값을 갖게 되는 구간은 선형이론을 만족한다고 볼 수 있고 전파이론에 예측한 임계시점 $\tau = \tau_c$ 근처에서 가장 먼저 불안정성이 발생함을 알 수 있다. 따라서 전파이론에서 얻은 임계값은 계가 가장 빨리 불안정하게 되는 시점을 예측한 것이다. 한편 초기 교란의 크기에 무관한 점을 미루어 추계모델[4]에서 제안한 식 (2)-(4)의 Langevin항 $\underline{F}$, $\overset{\nu}{G}$ 는 $\tau = 0$ 에서의 교란의 크기가 측정이 가능할 때까지는 재고되어야 할 것이다.

초기조건에 따라 r_1 의 최고점 $r_{1,max}$ 는 변화하게 되는데 이 시점은 Fig. 5에 나타난 것과 같이 Nusselt 수 $Nu(= q_w d/(k\Delta T))$ 가 전도상태에서 벗어나는 점과 일치하며 교란량의 시간에 대한 기울기가 최대가 되는 시점이다. 여기서 k 와 q_w 는 유체의 열전도도와 가열면에서의 열속이다. Figure 5에서 Nu 가 전도에서 벗어나는 τ_u 는 실험적으로 관측할 수 있는 시점으로 Patrick과 Wragg[8], Inoue 등[9]의 실험에서 얻은 경향과 일치한다. Fig. 6에서와 같이 $\theta_* = 10^{-3}$ 일 경우 r_1 이 최고점이 되는 시점이 약 $\tau \approx 4\tau_c$ 가 되어 실험결과와 예측값이 잘 일치한다. 이는 초기교란이 온도차 ΔT 의 0.1 %에 해당되는 값을 의미한다. 추계모델[3]의 경우 미소의 Langevin 교란을 초기값으로 하여 τ_u 의 실험값을 예측하였으나 초기값을 달리 입력 하였을 경우 τ_u 가 변화함은 Elder[15]에 의해 이미 보고되었다. 따라서 계가 본질적으로 불안정해 지는 시점을 얻기 위해서는 식 (5)를 통해 Fig. 4에 나타난 것과 같이 초기교란에 독립적인 불변의 교차점이 정의 되어야 한다. 즉, Mahler 등[10]과 Foster[11]가 언급한 'intrinsic instability' 또는 '불안정한 영역'은 τ_c 에 해당되며, 'realistic critical time' 또는 'manifest convection'은 $4\tau_c$ 가 되는 시간을 의미한다. τ_c 가 작은 경우, 전파이론에 의한 τ_c 와 실험에 따른 τ_u 와의 시간차는 가장 빨리 성장하는 교란이 경계층두께를 벗어나게 되는 잠재적인 기간으로 볼 수 있다.

지금까지의 결과를 정리하면 다음과 같다. 먼저 전파이론이 예측한 임계시점은 계가 가장 빨리 불안정해지는 시점을 의미하며, 전파이론을 이용해 계를 해석하는데 있어 유사변수로 전환이 가능하지 않을 경우 식 (5)를 이용하여 직접적으로 안정성을 판별할 수 있는 기준을 마련하였다.

감 사

본 연구는 교육인적자원부 주관 BK 21 프로젝트와 ㈜ LG화학의 지원으로 이루어졌음을 밝히며 이에 감사의 뜻을 전합니다.

참고문헌

1. Bénard, H.: *Ann. Chem. Phys.*, **23**, 62(1901).
2. Kim, M.C., Choi, K.H. and Choi, C.K.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **42**, 4253(1999).
3. Yang, D.J. and Choi, C.K.: *Phys. Fluids*, **14**, 930(2002).
4. Jhaveri, B.S. and Homsy, G.M.: *J. Fluid Mech.*, **114**, 251(1982).
5. Morton, B.R.: *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **10**, 433(1957).
6. Foster, T.D.: *Phys. Fluids*, **8**, 1249(1965).
7. Wankat, P.C. and Homsy, G.M.: *Phys. Fluids*, **20**, 1200(1977).
8. Patrick, M.A. and Wragg, A.A.: *Int. J. Heat Mass Transfer*, **18**, 1397(1975).
9. Inoue, Y., Akutagawa, S., Saeki, S. and Ito, R.: *Kagakugogaku Ronbunshu*, **9**, 359(1983).
10. Mahler, E.G., Schechter, R.S. and Wissler, E.H.: *Phys. Fluids*, **11**, 1901(1968).
11. Foster, T.D.: *Phys. Fluids*, **12**, 2482(1969).

12. 정태준, 김민찬, 최창균: 화학공학의 이론과 응용, **7**, 4715(2001).
13. Herring, J.R.: *J. Atmos. Sci.*, **21**, 277(1964).
14. Patankar, S.V.: "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Taylor and Francis, New York (1980).
15. Elder, J.W.: *J. Fluid Mech.*, **35**, 417(1969).

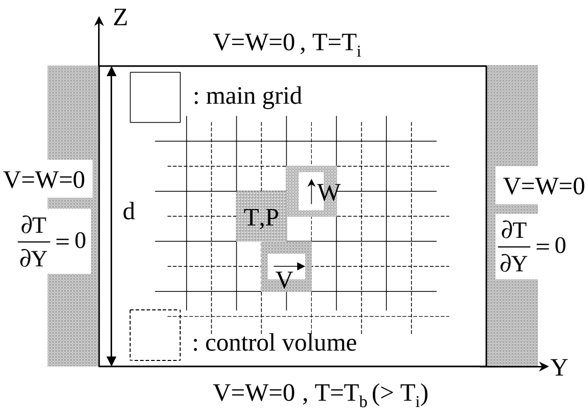

Fig. 1. Calculation domain.

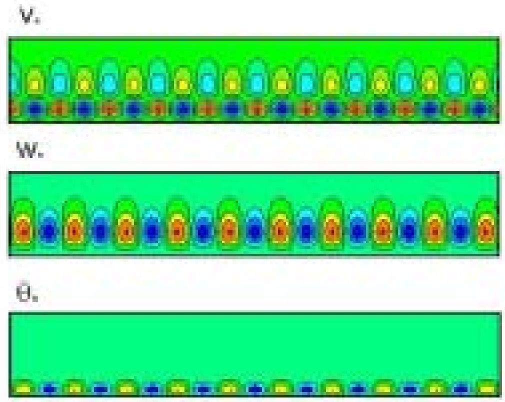

Fig. 2. Initial conditions.

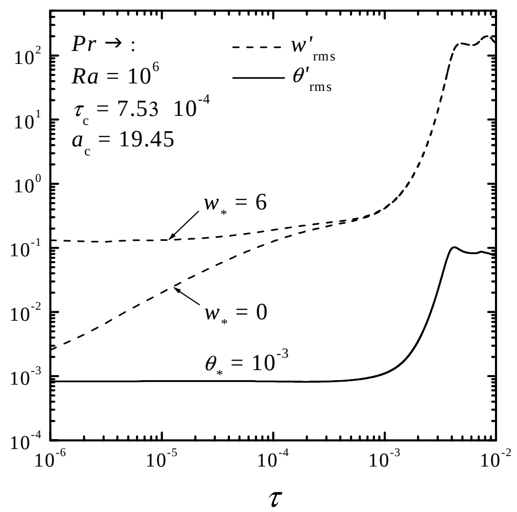

Fig. 3. Temporal behavior of disturbances.

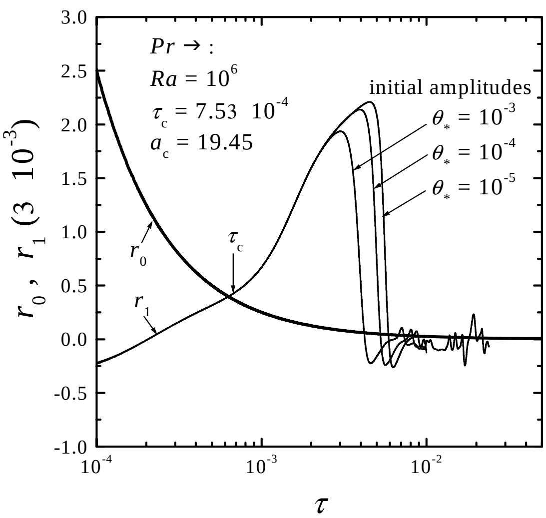

Fig. 4. Growth rates of mean-temperature and its fluctuation.

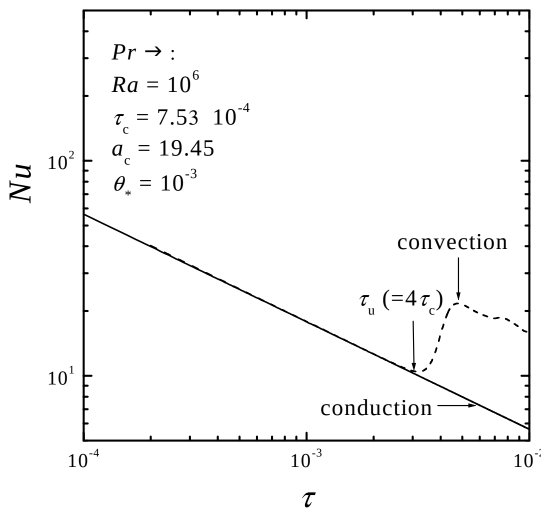

Fig. 5. Time-dependent Nusselt number.

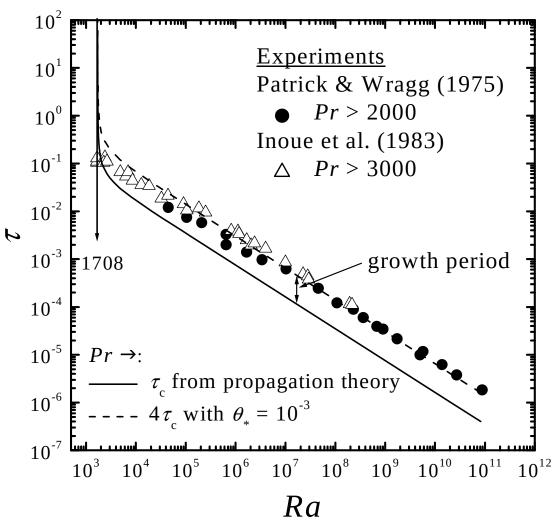

Fig. 6. Comparison of present study with available experiments.